دانشکده مهندسی و فنآوری دانشگاه مازندران

عنوان درس: تحلیل و مدیریت سیستم‌های منابع آب ۱

Water Resources System Analysis-1

مدرس: دکتر محمود محمد رضاپور طبری

دانشیار گروه مهندسی عمران

مفهوم بهینه‌سازی کلاسیک

- مبانی بهینه‌سازی
- شرایط بهینگی کان-تاکر
- روش برنامه‌ریزی خطی
- مدل‌های بهینه‌سازی خطی
- روش سیمپلکس، تحلیل حساسیت

آشنایی با مفهوم بهینه‌سازی و تعاریف مرتبط با آن

در طی سال‌های اخیر، مدل‌های ریاضی بهینه‌یابی با توجه به ظهور کامپیوتر در عرصه علم و تکنولوژی گسترش چشمگیری یافته است. امروزه بهینه‌یابی به عنوان یک موضوع کلیدی در اکثر علوم مورد توجه و استفاده قرار گرفته است.

بهینه یابی: یافتن مناسب ترین مقدارهای ممکن برای متغییرهای مورد نظر در یک مسئله به گونه ای که به ازای مقدارهای یافت شده، مقدار مطلوبی برای هدف مسئله حاصل شود.

تصمیم‌گیری روش علمی برای انتخاب بهترین راهکار موجود می‌باشد.

تصمیم‌گیرنده، **اولین عنصر** تصمیم‌گیری است که ممکن است یک فرد، گروه یا سازمان باشد. در صورتیکه تعداد تصمیم‌گیرندگان بیش از یکی باشد، به دلیل متفاوت بودن نظرات و اهداف هر کدام از تصمیم‌گیرندگان، معمولاً نتیجه‌ای که مورد نظر همه باشد، حاصل نمی‌گردد. در چنین مواردی معمولاً تصمیمی اتخاذ می‌گردد که در آن تا حد امکان نظرات **کلیه تصمیم‌گیرندگان** مورد توجه قرار گیرد.

در مسائل تصمیم‌گیری به منظور رسیدن به اهداف مورد نظر می‌توان مسأله را به صورت یک **مدل ریاضی** تبدیل نمود و از روش‌های بهینه‌یابی موجود بهره جست.

آشنایی با مفهوم بهینه‌سازی و تعاریف مرتبط با آن

تبدیل یک مسأله تصمیم‌گیری به یک مدل ریاضی، مدل‌سازی نامیده می‌شود. گزینه‌های ممکن در تصمیم‌گیری به صورت **متغیرهای تصمیم** (Decision variables) در مدل ریاضی در نظر گرفته می‌شوند.

- متغیر تصمیم در واقع متغیرهایی هستند که در تعیین مقدار تابع هدف نقش اصلی (مستقیم) را بازی می کنند.
- در هر مسئله بهینه سازی یافتن مقدار بهینه برای متغیرهای تصمیم به طوری که به ازای آن ها مقدار تابع هدف، بیشینه، کمینه یا برابر یک مقدار مشخص شود، مدنظر است.
- متغیرهای تصمیم متغیرهای مستقل مسئله هستند که می توان برای آنها هر مقداری را (در محدوده مجاز) متصور شد.
- تصمیم در مورد مقدار نهایی هر متغیر تصمیم در اختیار کاربر و یا روش بهینه سازی مسئله است که با توجه به مقدار متناظر تابع هدف برای هر مجموعه از متغیرهای تصمیم اتخاذ می شود.

نحوه تعریف تابع هدف و محدودیت ها در مسائل بهینه سازی

تعریف متغییرهای تصمیم

متغییرهای تصمیم یا همان مجهولاتی که لازم است در طی فرآیند بهینه سازی تعیین شوند باید بگونه ای در نظر گرفته شوند که شرایط زیر را محقق نمایند:

- ✓ بر مبنای آن ها بتوان تابع هدف مناسبی را شکل داد به گونه ایی که تابع هدف وابسته این متغییر تصمیم باشد.
- ✓ حتی المکان به صورت متغییر ترکیبی با سایر متغییرهای مؤثر در مسأله نباشد. به عبارت دیگر متغییر تصمیم مستقل باشد و دربردارنده چندین متغییر نباشد. به عنوان مثال اگر متغییر تصمیم میزان تخصیص به نیازهای آبی است و این نیازها متنوع می باشند، بهتر است که برای هر نیاز آبی یک متغییر تصمیم مجزایی را تعریف نمود. این امر در خصوص تخصیص از منابع مختلف آبی نیز صادق است.
- ✓ متغییرهایی که دارای تغییرات پیوسته می باشند جهت انتخاب به عنوان متغییر تصمیم مناسب تر می باشند. علت این امر تنوع وسیع انتخاب آن ها توسط الگوریتم های بهینه سازی است. در صورت گسسته بودن متغییرهای تصمیم، تعداد حالت هایی که امکان انتخاب توسط مدل های بهینه سازی وجود دارد به نحوه چشمگیری کاهش می یابد.
- ✓ از بکار بردن توابع، شاخص ها و معیارهای ریاضی به عنوان متغییر تصمیم اکیداً خودداری گردد.

نحوه تعریف تابع هدف و محدودیت ها در مسائل بهینه سازی

نمونه هایی از متغییرهای تصمیم معمول در مهندسی آب

۱- میزان تخصیص ماهانه (سالانه) آب به نیازهای شرب، کشاورزی و صنعت

۲- میزان برداشت آب از دریچه های یک سد به صورت انتخابی

۳- میزان برداشت از چاه های بهره برداری

۴- قطر، طول و عمق نصب لوله در شبکه توزیع آب شهری

۵- درصد سطح تحت پوشش هر یک از کاربری های واقع در یک محدوده مطالعاتی

۶- میزان برداشت آب از رودخانه به مصارف مختلف

۷- میزان تصفیه فاضلاب کارخانجاتی که دارای پساب ورودی به رودخانه می باشند.

۸- حجم خاکبرداری و خاکریزی مورد نیاز جهت تعیین ابعاد بهینه مخازن سدها

۹- موقعیت چاه های پایش جهت کاهش هزینه های نمونه برداری کمی و کیفی

۱۰- درصد زیرکشت هر یک از محصولات واقعی در یک منطقه کشاورزی

نحوه تعریف تابع هدف و محدودیت ها در مسائل بهینه سازی

۱۱- ابعاد کانال با شکل های مختلف

۱۲- ابعاد سرریزهای مختلف

۱۳- درصد مواد با دانه بندی های مختلف جهت ساخت موج شکن

۱۴- موقعیت و عمق دفن پساب های صنعتی

۱۵- ظرفیت و میزان انتقال آب در خطوط انتقال

۱۶- موقعیت مخازن در شبکه های توزیع آب شهری

۱۷- پارامترهای هیدرودینامیکی آبخوان (ضرایب ذخیره و هدایت هیدرولیکی) برای هر نقطه از آبخوان

۱۸- مقادیر بردارهای وزن و بایس در مدل های شبیه سازی متغییرهای منابع آب

۱۹- مقادیر پارامترهای انواع مدل های نرم جهت شبیه سازی متغییرهای منابع آب

آشنایی با مفهوم بهینه‌سازی و تعاریف مرتبط با آن

مجموعه متغیرهای تصمیم یا گزینه‌های ممکن، فضای تصمیم (Decision space) را تشکیل می‌دهند.

فضای تصمیم مجموعه تمامی جواب های ممکن در یک مسئله بهینه سازی را مشخص می کند.

به عبارت دیگر هر نقطه از فضای تصمیم یک مسئله بهینه سازی معرف یک بردار از متغیرهای تصمیم مسئله است. هر یک از مؤلفه های این بردار مقدار یکی از متغیرهای تصمیم را مشخص می کنند که می تواند توسط کاربر یا روش بهینه سازی انتخاب شود. بنابراین تمام بردارهای ممکن از متغیرهای تصمیم، فضای تصمیم مسئله را تشکیل می دهند.

محدوده و مرز فضای تصمیم هر مسئله بهینه سازی با حدود مقدارهای مجاز متغیرهای تصمیم آن مشخص و محدود می شود به این ترتیب در صورت عدم وجود محدودیت در یک یا چند متغیر تصمیم، فضای تصمیم می تواند نامتناهی شود.

به عنوان مثال در تعیین اندازه حجم مخزن به عنوان یک متغیر تصمیم، فضای تصمیم از کمترین تا بیشترین مقدار ممکن برای حجم مخزن را شامل می‌شود.

آشنایی با مفهوم بهینه‌سازی و تعاریف مرتبط با آن

جواب (Solution)

به هر مجموعه و یا بردار از متغیرهای تصمیم که در آن هر متغیر دارای مقداری از محدوده مجاز مربوط به خود است، یک جواب برای مسئله بهینه سازی گفته می شود. به عنوان مثال اگر یک مسئله بهینه سازی دارای دو متغیر تصمیم باشد و هر دو متغیر تصمیم نیز مجاز به انتخاب از بازه (۵ و ۰) باشند، آنگاه هر زوج مرتب در این محدوده، یک جواب برای مسئله مورد نظر را نشان می دهد.

جواب‌های امکان‌پذیر (Feasible solutions) جواب‌هایی می‌باشند که کلیه محدودیت‌ها را برآورده می‌سازند.

مجموعه جواب‌های امکان‌پذیر، **فضای امکان‌پذیر (موجه)** را تشکیل می‌دهند.

آشنایی با مفهوم بهینه‌سازی و تعاریف مرتبط با آن

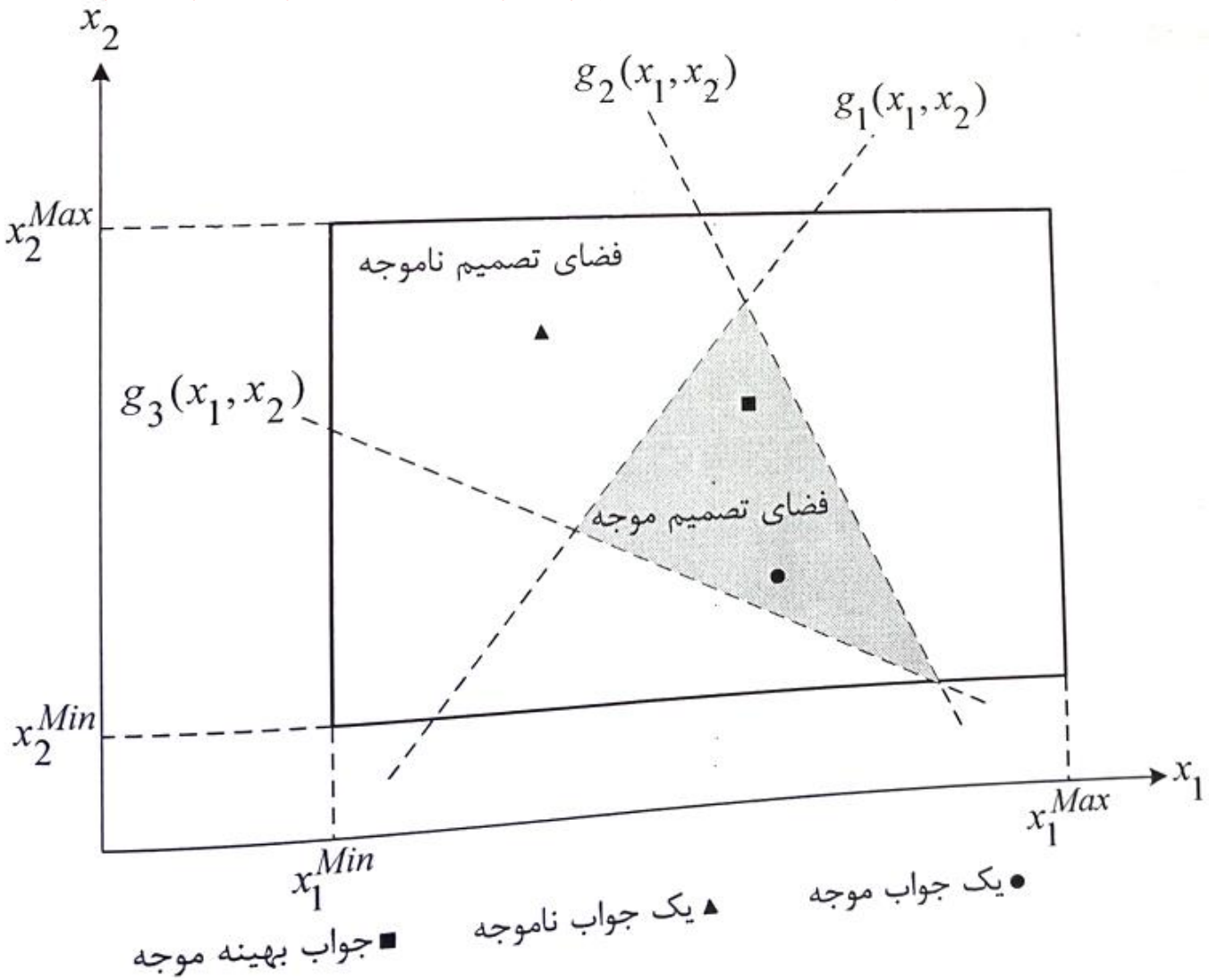
قیدهای مربوط به متغیرهای تصمیم در هر مسئله بهینه سازی به صورت برشی در فضای تصمیم مسئله اعمال می شوند.

با توجه به جهت نامساوی مسئله موجود در قید، یک سمت برش به عنوان منطقه موجه و سمت دیگر به عنوان منطقه ناموجه تعریف می شود. به این ترتیب با اعمال کلیه قیدها در فضای تصمیم، ممکن است فضایی به وجود بیاید که در واقع اشتراک منطقه موجه کل قیدها باشد به چنین فضایی فضای تصمیم موجه و به مکمل این فضا در داخل فضای تصمیم مسئله فضای تصمیم ناموجه می گویند. از آنجا که جواب مقدارهای متغیرهای تصمیم نهایی هر مسئله باید به طور حتم در فضای تصمیم موجه مسئله قرار داشته باشند تا کلیه قیدها را ارضا نمایند بنابراین در صورت تهی بودن فضای تصمیم موجه، مسئله بهینه سازی در عمل جواب نخواهد داشت.

آشنایی با مفهوم بهینه‌سازی و تعاریف مرتبط با آن

اگر فضای تصمیم‌گیری قابل شمارش باشد (همانند تعیین اندازه قطر لوله، تعیین تعداد لوله ها در یک شبکه توزیع آب، انتخاب نوع کاربری اراضی در یک حوضه جهت کاهش میزان خسارات سیل، انتخاب پیزومترها برای شبکه پایش، تعیین تعداد چاه های دارای کیفیت مناسب و ...)، مسأله گسسته نامیده می‌شود و چنانچه این فضا پیوسته باشد و متغیرهای تصمیم‌گیری بی‌نهایت حالت ممکن را قبول کنند (همانند میزان برداشت از منابع آب، میزان تخصیص به نیازها، مقدار پارامترهای هیدرودینامیکی آبخوان و ...)، مسأله پیوسته نامیده می‌شود. همچنین این فضای تصمیم ممکن است محدب یا غیرمحدب باشد.

نمایش فضای تصمیم و جواب های موجه و ناموجه



آشنایی با مفهوم بهینه‌سازی و تعاریف مرتبط با آن

در تصمیم‌گیری معمولاً محدودیت‌های مالی، اجتماعی، تکنیکی و اثرات جانبی زیست محیطی از اهمیت ویژه‌ای برخوردارند. این محدودیت‌ها در مسائل مدل‌سازی به صورت محدودیت (Constraint) (قید) در نظر گرفته می‌شوند.

محدودیت‌ها نیز معمولاً توسط معادلات و یا نامعادلاتی که شامل متغیرهای تصمیم‌گیری هستند، مشخص می‌گردند.

به صورت کلی بهینه سازی زمانی معنا خواهد داشت که:

- مسئله موجود از نظر برخی منابع دچار محدودیت باشد (در توابع هدف خطی).
- با افزایش استفاده از یک یا چند منبع بیش از یک مقدار مشخص، سودهای مورد انتظار طرح کاهش یافته و به زیان (افزایش هزینه) تبدیل شوند و سبب کاهش مطلوبیت (عدم بهبود) تابع هدف شوند (در توابع هدف غیرخطی).

طبیعی است که در صورت عدم وجود محدودیت در منابع، مقدار تابع هدف خطی را می توان به صورت نامحدود بهبود داد از طرفی در شرایطی که مقدار یک منبع فراوان باشد استفاده بهینه از آن منبع لزوم چندانی نداشته و بهینه سازی در مصرف آن نیز کم اهمیت خواهد بود. بنابراین هر مسئله بهینه سازی با توجه به فیزیک و شرایط واقعی مربوط به آن می تواند دارای تعدادی محدودیت و یا قید باشد که در ازای وجود آن ها، انتخاب برخی مقدارها برای متغیرهای تصمیم ناممکن می شود.

آشنایی با مفهوم بهینه‌سازی و تعاریف مرتبط با آن

تابع هدف (Objective Function)

هدف نهایی در هر مسئله بهینه سازی برقراری شرایط بهینه برای یکی از اجزاء مسئله است. این جزء (نمایه) که اغلب با حرف Z نشان داده می شود همواره به طور مستقیم یا غیر مستقیم تابعی از متغیرهای دیگر است که می توان این ارتباط را به صورت یک رابطه ریاضی نمایش داد. به این رابطه ریاضی، تابع هدف مسئله بهینه سازی گفته می شود.

- در مسائل بهینه سازی، تابع هدف مهمترین رکن است. هر تابع هدف دارای جهتی است که راستای بهینه سازی را نشان می دهد. جهت تابع هدف می تواند بیشینه سازی، کمینه سازی یا برابرسازی نمایه Z باشد.
- متغیرهای موجود در رابطه ریاضی تابع هدف را باید به گونه ای تغییر داد که منجر به مقدار بهینه (مقدار بیشینه در مسئله بیشینه سازی و مقدار کمینه در مسئله کمینه سازی و مقدار معادل در مسئله های برابرسازی) برای نمایه Z شوند. به این ترتیب مطلوبیت هر جواب در روند حل مسئله با توجه به مقدار عددی نمایه Z (تابع هدف) مربوط به آن جواب تعیین می شود.

آشنایی با مفهوم بهینه‌سازی و تعاریف مرتبط با آن

تابع برازش (Fitness Function)

متناظر با هر مجموعه از متغیرهای تصمیم بدون توجه به موجه و یا ناموجه بودن جواب و فقط جهت بررسی مطلوبیت متغیرهای تصمیم (جواب) در فضای تصمیم یک تابع هدف می تواند محاسبه شود. چنانچه مقدار این تابع هدف ضمن بررسی ارضا یا عدم ارضای قیدها و با اعمال جریمه (Penalty) اصلاح شود تابع برازش نام می گیرد و برای سنجش جواب های مختلف نسبت به یکدیگر استفاده می شود.

متغیرهای حالت (State Variable)

آن دسته از متغیرهای مسئله هستند که ممکن است به طور مستقیم در تعیین مقدار تابع هدف مؤثر نبوده ولی به طور عمومی در ارزیابی قیدها مورد نیاز باشند. این متغیرها به طور مستقیم تحت تأثیر مقدارهای انتخاب شده برای متغیرهای تصمیم هستند. در رابطه موجود بین متغیرهای تصمیم و حالت، متغیرهای تصمیم معادل متغیرهای مستقل (آزاد) و متغیرهای حالت معادل متغیرهای وابسته هستند. به عبارت دیگر انتخاب هر مقدار دلخواه (با رعایت قیدها) برای متغیرهای تصمیم امکان پذیر است و به فراخور آن مقدارهای انتخاب شده، مقدار متغیرهای حالت با توجه به رابطه موجود بین متغیرهای حالت با متغیرهای تصمیم بدست می آیند.

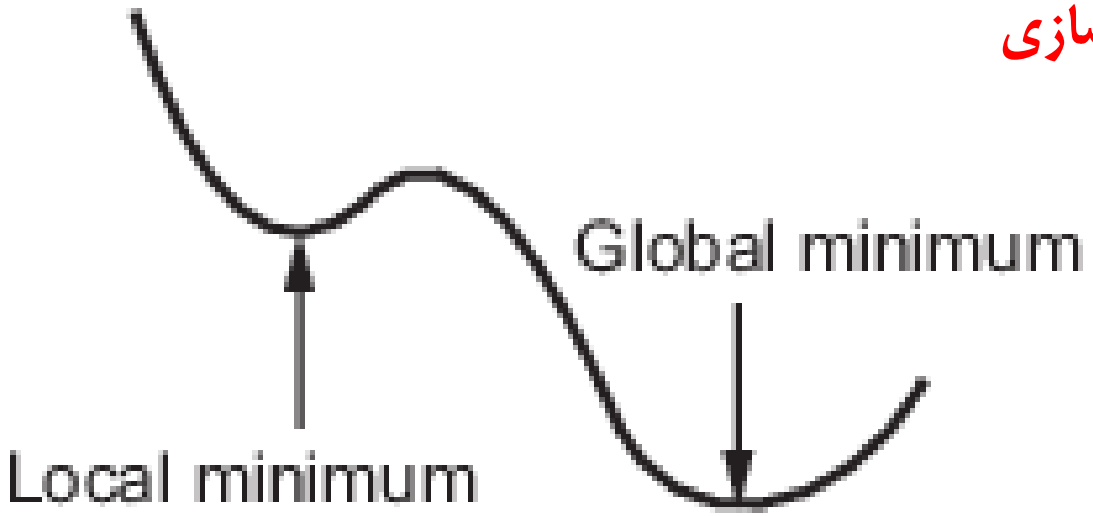
بررسی وجه تمایز جواب‌های بهینه محلی و بهینه کلی

بهینه محلی یا موضعی (Local Optimum)، بهینه مطلق (Global Optimum) و نزدیک بهینه (Near Optimum)

به صورت کلی راه حل و یا راه حل هایی که توسط مدل های بهینه سازی ارائه می شود به عنوان یک جواب (Solution) مطرح می باشد. در صورتی که جواب های یافت شده از جواب هایی که در نزدیکی آن در فضای امکان پذیر وجود دارند، بهتر باشد، آن جواب به عنوان جواب بهینه محلی (موضعی) شناخته می شود. علت محلی بودن این جواب، آن است که ممکن است جواب بهتری در فاصله دورتری از این جواب وجود داشته باشد که مدل بهینه ساز آن را پیدا نکرده است.

در صورتی که جواب بهینه مشخص شده از تمامی جواب های واقع در فضای موجه تصمیم گیری بهتری باشد، آن جواب به عنوان جواب بهینه کلی شناخته می شود و هدف نهایی تمامی مدل های بهینه سازی، تعیین این جواب است که بهترین راه حل از یک مسأله بهینه سازی تلقی می شود.

بررسی وجه تمایز جواب‌های بهینه محلی و بهینه کلی



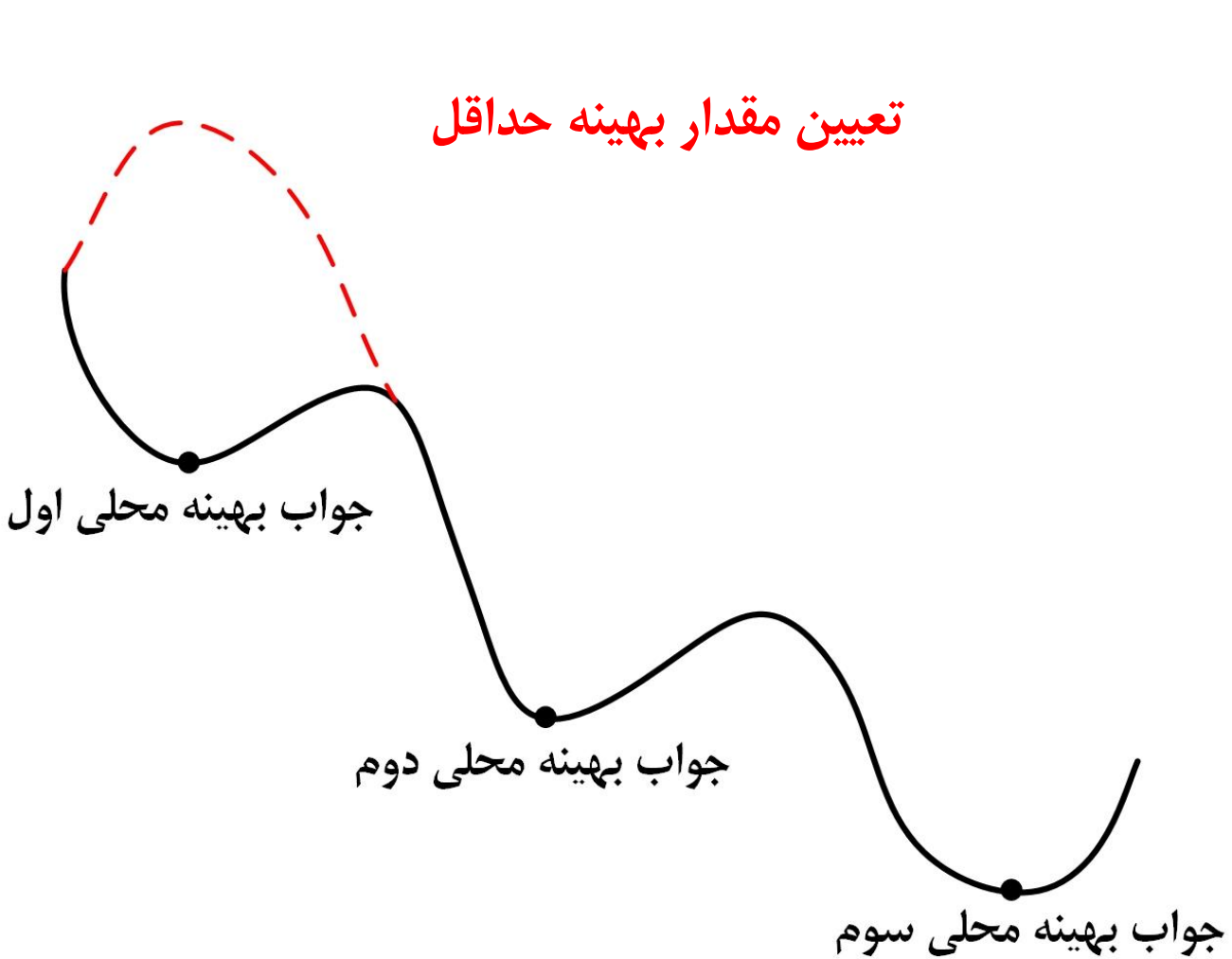
نمونه ای از تفاوت بین جواب بهینه محلی و کلی در یک مسأله حداقل سازی

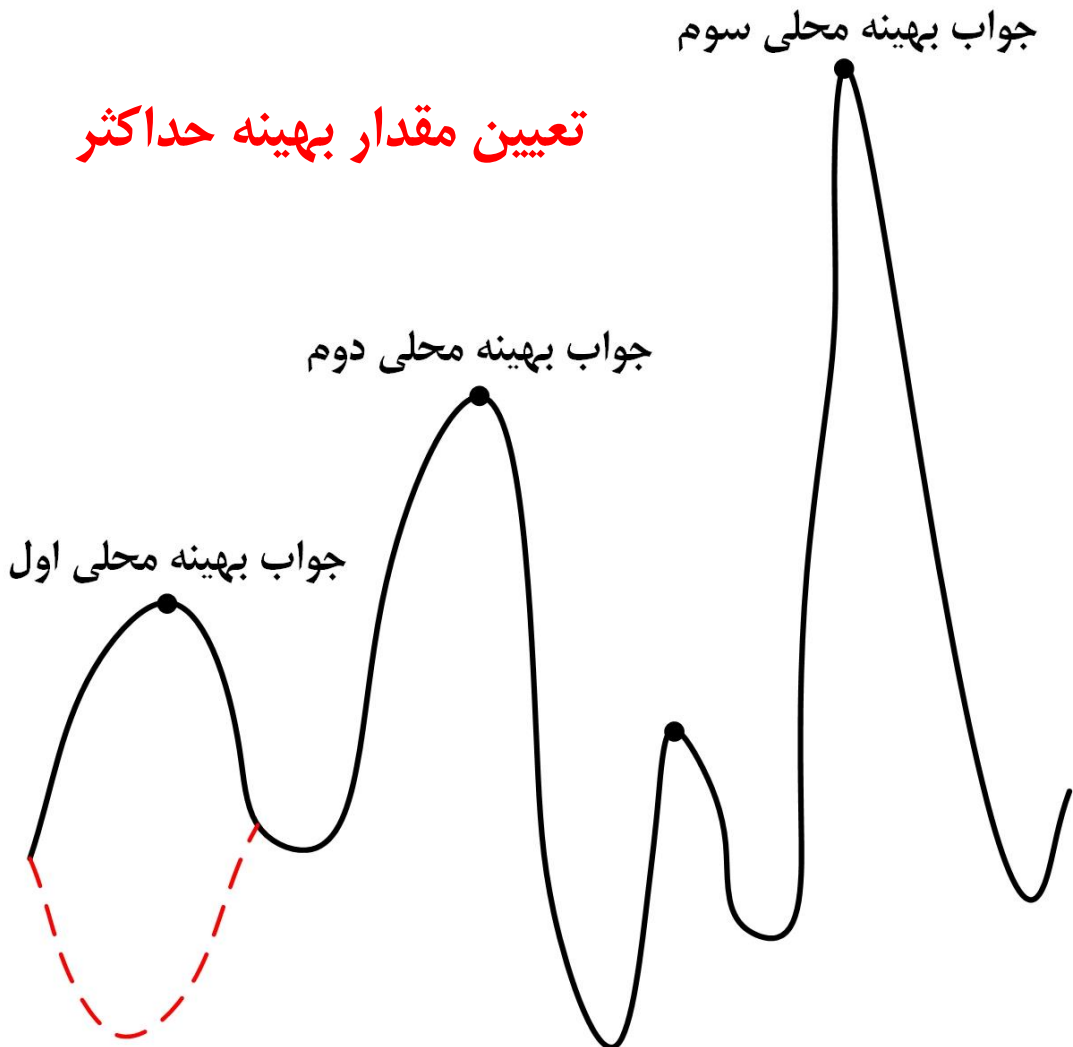
نکته ۱: با توجه به فضای موجه ایی که توسط محدودیت های مسأله تعریف می شود، مقدار جواب های محلی و کلی می تواند متفاوت باشد. هرچه این فضای موجه کوچکتر باشد، امکان یافتن جواب کلی بیشتر خواهد بود.

نکته ۲: جهت رهایی از جواب های محلی و اطمینان از یافتن جواب کلی می توان پس از یافتن یک جواب محلی با تغییر علامت و یا مقدار آن جواب (در صورتی که مسأله حداقل سازی است، جواب محلی یافت شده چند برابر افزایش یابد و به مجموعه جواب های موجود در فضای موجه اضافه شود. همچنین اگر مسأله حداکثرسازی است، جواب محلی در عدد منفی یک ضرب شود تا از حالت جواب محلی مطلوب خارج گردد.)، جواب محلی مورد نظر را از مجموعه جواب های موجود خارج نمود تا مدل سایر جواب های محلی را مورد جستجو قرار دهد.

بررسی وجه تمایز جواب‌های بهینه محلی و بهینه کلی

در صورتی که جواب محلی دوم یافت شده از جواب محلی اول بهتر بود، جایگزین جواب محلی اول و در غیر اینصورت جواب محلی سوم مورد جستجو قرار گیرد. این روند تا جستجوی کامل فضای موجه ادامه می یابد.

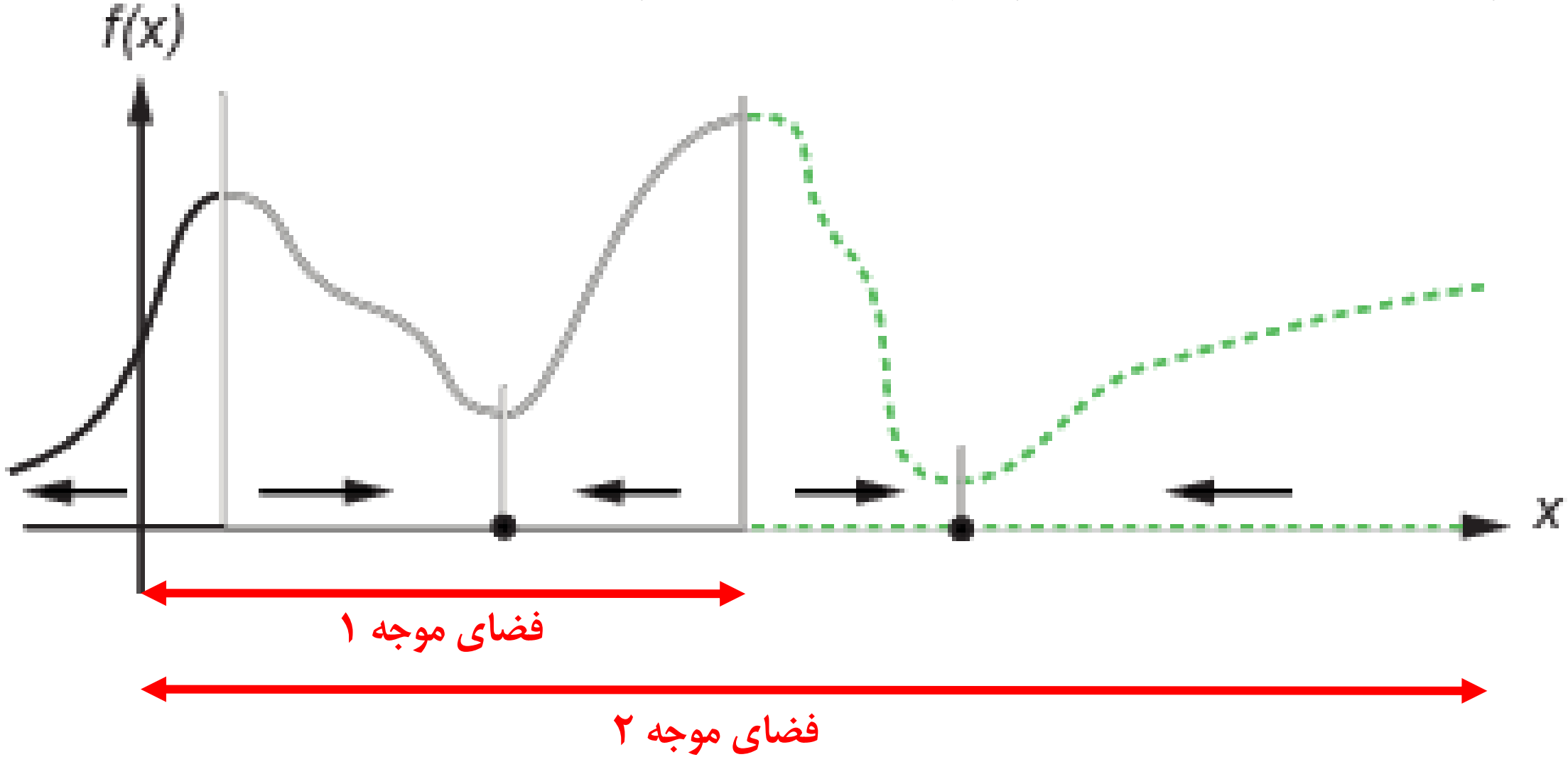




بررسی وجه تمایز جواب‌های بهینه محلی و بهینه کلی

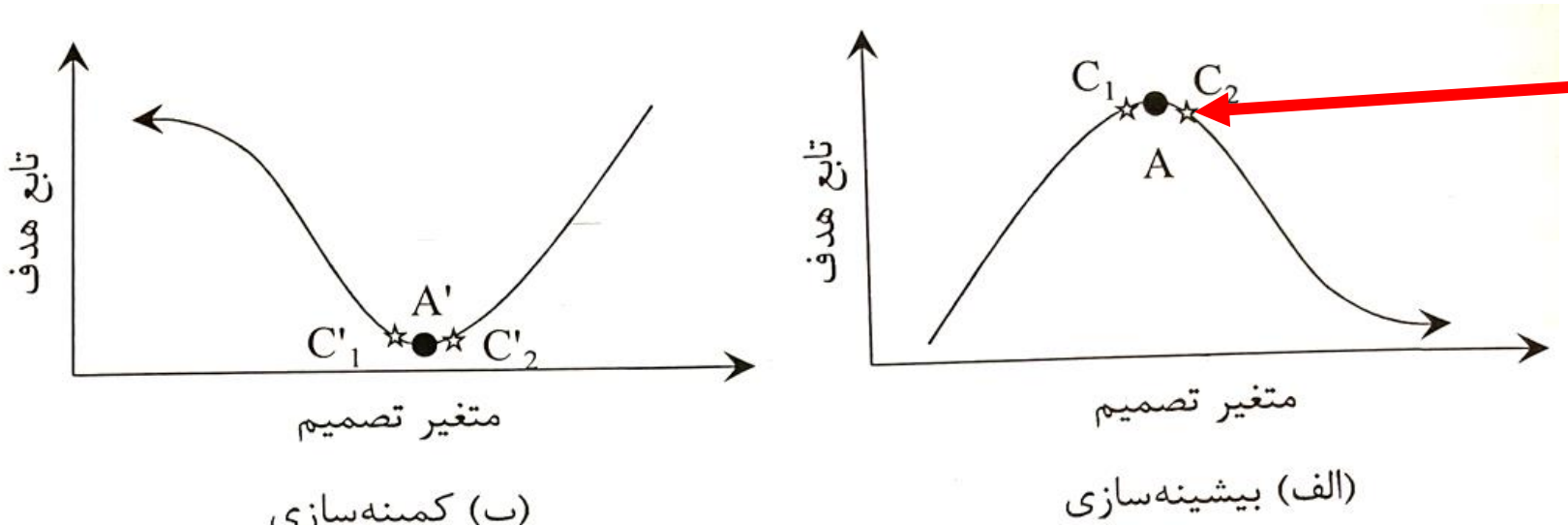
بنابراین فضایی که به عنوان فضای موجه توسط محدودیت های مسأله تعریف می شود، در انتخاب جواب بهینه کلی بسیار مؤثر است.

با تغییر فضای موجه از فضای ۱ به فضای ۲، مقدار جواب بهینه حداقل نیز تغییر نموده است.

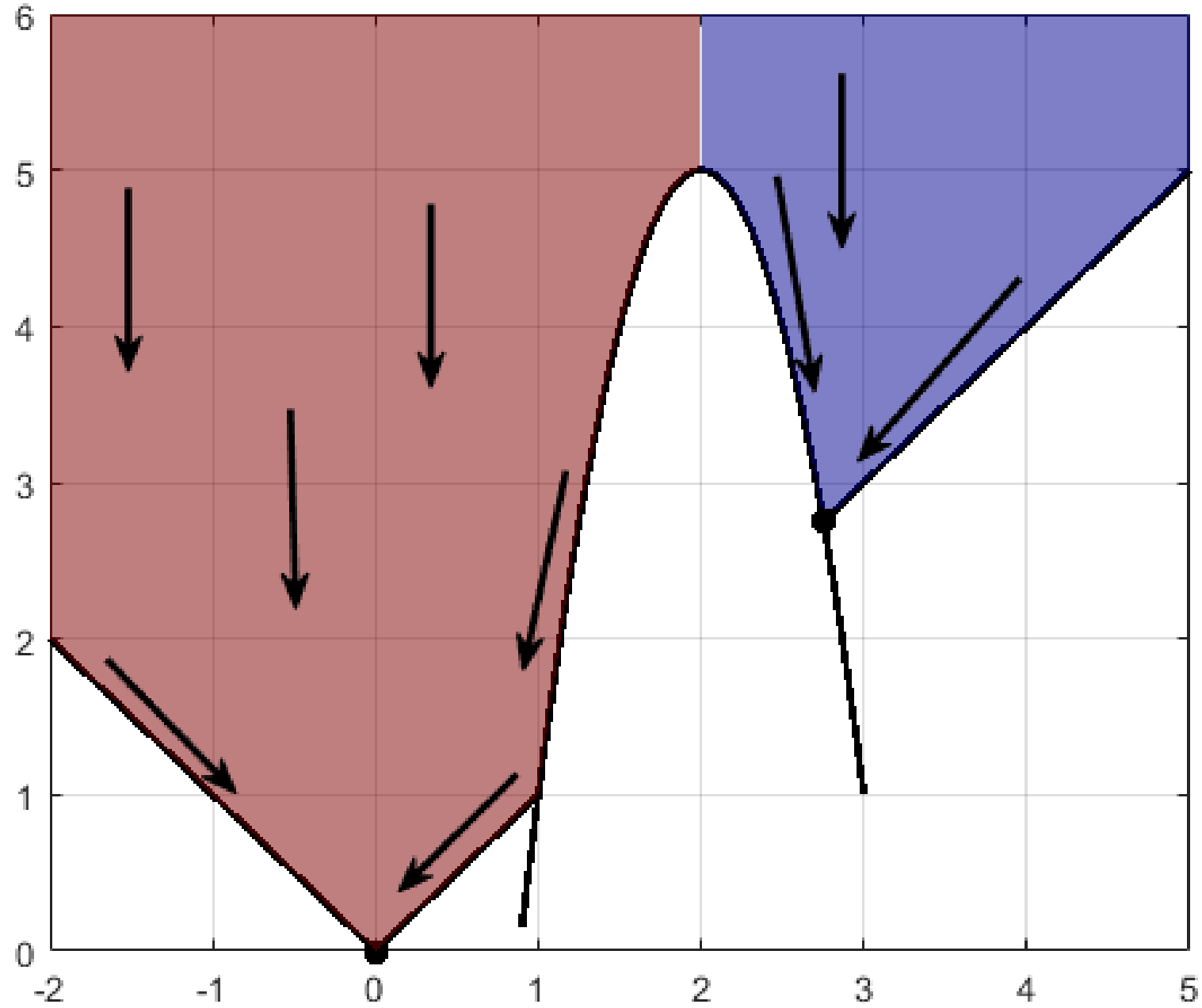


بررسی وجه تمایز جواب‌های بهینه محلی و بهینه کلی

در برخی مسائل بهینه سازی مهندسی، به دلیل نوع روش بهینه سازی مورد استفاده و یا پیچیدگی ذاتی مسئله، احتمال دستیابی به جواب بهینه مطلق (کلی) بسیار کم است. در چنین شرایطی مفهوم **جواب های نزدیک بهینه** مطرح می.شود جواب های نزدیک بهینه جواب هایی هستند که از نظر مقدار تابع هدف در شرایط بسیار مطلوبی قرار داشته و فاصله اندکی با جواب بهینه مطلق دارند، ولی به طور دقیق با جواب بهینه مطلق برابر نیستند. در مسئله های مهندسی و واقعی حتی دستیابی به چنین نقطه هایی (نزدیک بهینه) از فضای تصمیم نیز می تواند خوب و مناسب باشد. بسیاری از روش های بهینه سازی مبتنی بر جستجوی تصادفی، پس از رسیدن به جواب های نزدیک بهینه متوقف می شوند.



بررسی وجه تمایز جواب‌های بهینه محلی و بهینه کلی



تابع هدف در این مسأله حداقل نمودن میزان y است.

$$y \geq |x|$$
$$y \geq 5 - 4(x-2)^2$$

مطابق شکل می توان دریافت در صورتی که فضای موجه $x \leq 2$ باشد، تحت این شرایط مقدار جواب بهینه نقطه $(0,0)$ است. اما در صورتی که فضای موجه $x \geq 2$ باشد، مقدار نقطه بهینه $(2.75,2.75)$ خواهد شد.

همچنین برای $-2 \leq x \leq 5$ ، دو جواب محلی وجود خواهد داشت که ممکن است رویکردهای متداول بهینه سازی نتوانند جواب بهینه کلی را ارائه دهند.

آشنایی با مفهوم بهینه‌سازی و تعاریف مرتبط با آن

بر اساس این تفاوت‌ها است که مشخص می‌کند مدل چگونه حل شود. بنابراین قبل از حل مدل‌های ریاضی لازم است خصوصیات ریاضی تابع هدف، محدودیت‌ها و متغییرهای تصمیم در نظر گرفته شود. به عنوان مثال تابع هدف ممکن است خطی، غیرخطی، مشتق‌پذیر و یا غیرمشتق‌پذیر، یک‌هدفه یا چندهدفه و ... باشد.

شکل کلی یک مدل بهینه سازی

Objective function:

Minimize $(Maximize) f(X)$ $\quad , X = x_1, x_2, \ldots, x_N$

Constraints:

$G_i(X) = 0 \quad , \quad i = 1, \ldots, m_1$

$G_i(X) \geq 0 \quad , \quad i = m_1 + 1, \ldots, m_1 + n$

$G_i(X) \leq 0 \quad , \quad i = m_1 + n, +1 \ \ldots, m_1 + n + r$

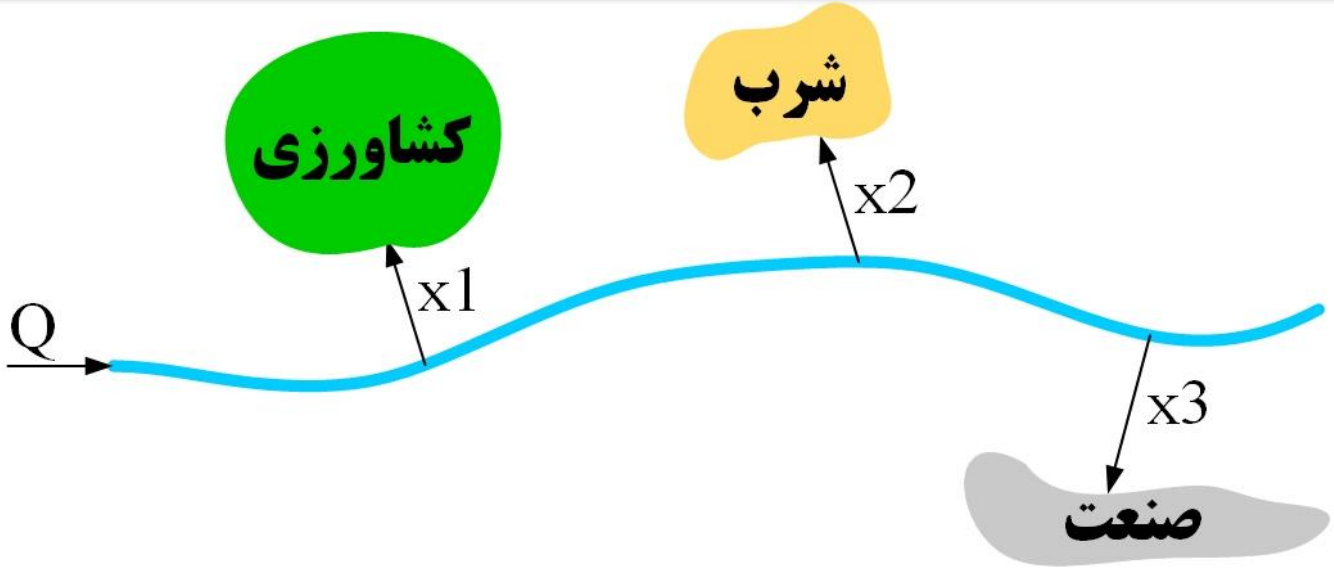
در این مدل بهینه سازی، X، به عنوان متغییرهای تصمیم و $G_i(X)$ به عنوان محدودیت های مسأله می باشند.

همچنین $f(X)$ بیانگر تابع هدف است که با توجه به هدف مسأله می توان آن را حداقل و یا حداکثر نمود.

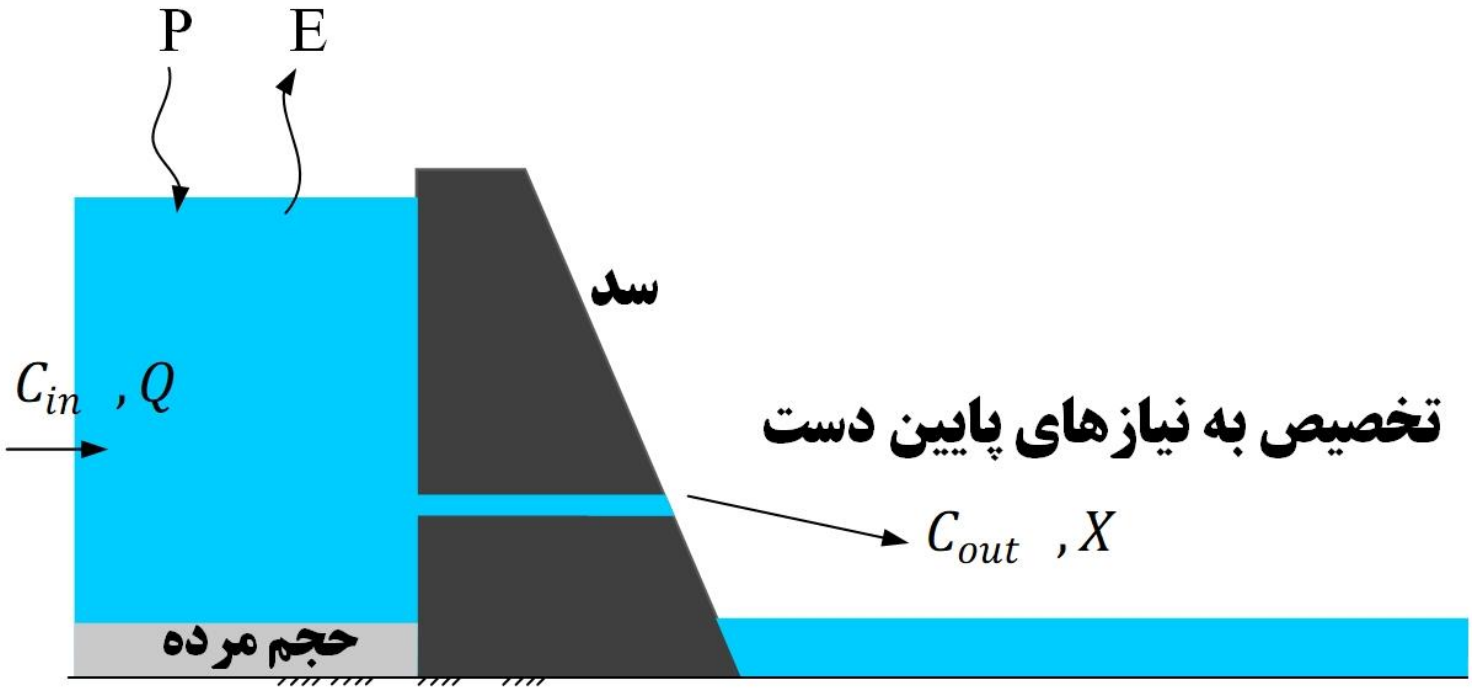
ارائه یک راه حل کارا و دقیق در مسائل بهینه سازی وابسته به تعداد محدودیت ها، متغییرهای تصمیم و مشخصات تابع هدف و محدودیت می باشد.

نمونه هایی از مسائل بهینه سازی منابع آب

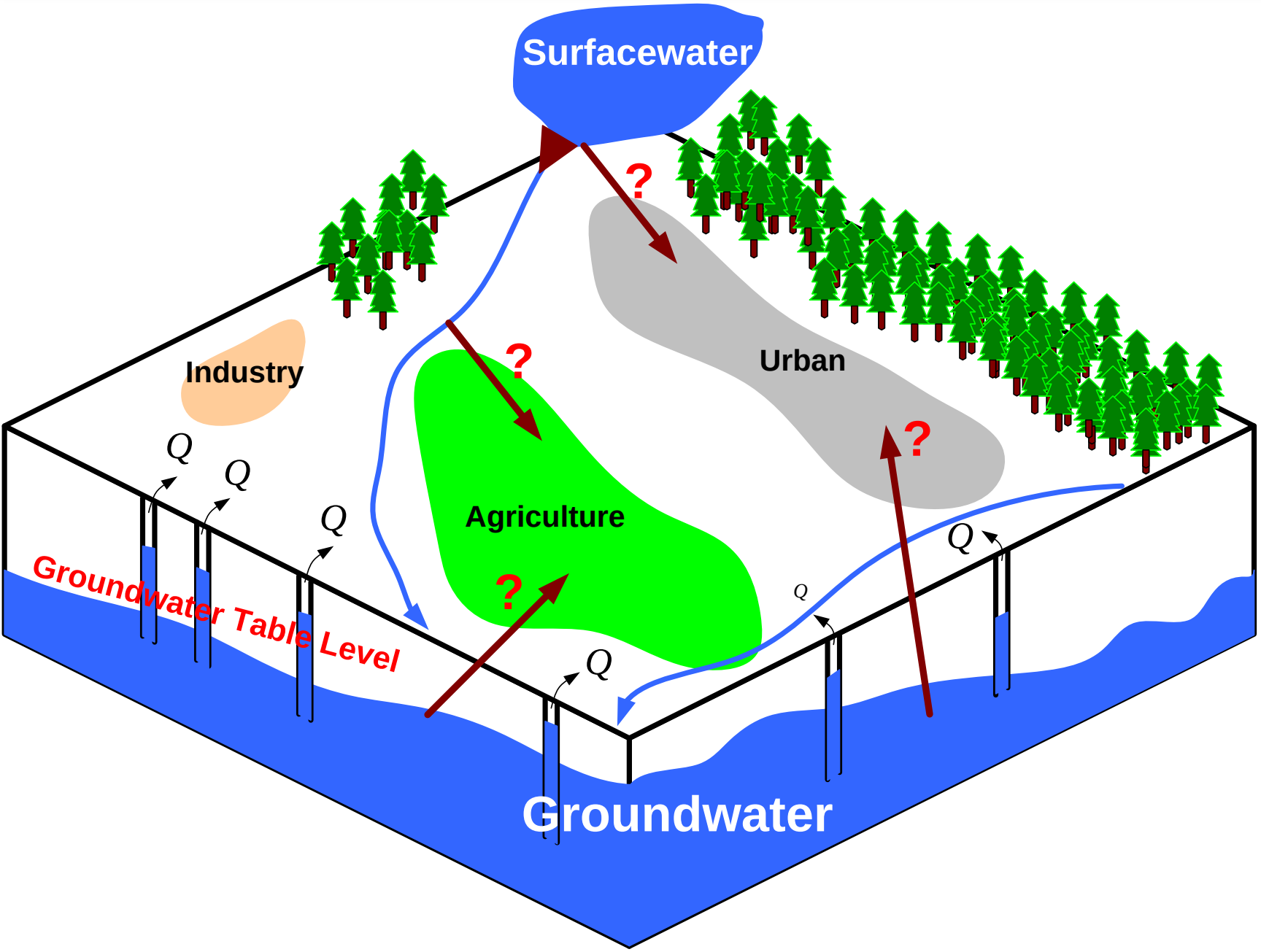
نمایی از یک مسأله بهینه سازی رودخانه



ساختار شماتیک مسأله بهینه سازی مخزن سد



نمونه هایی از مسائل بهینه سازی منابع آب



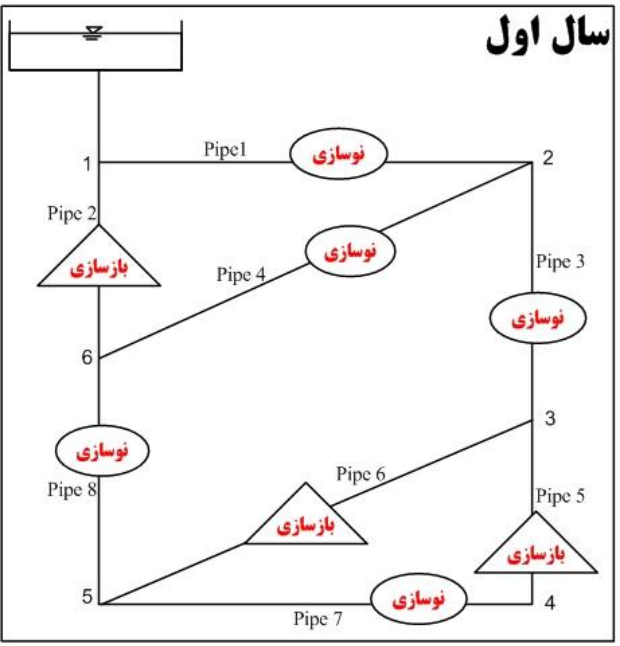
ساختار مدل تلفیقی بهره برداری بهینه از منابع آب سطحی و زیرزمینی

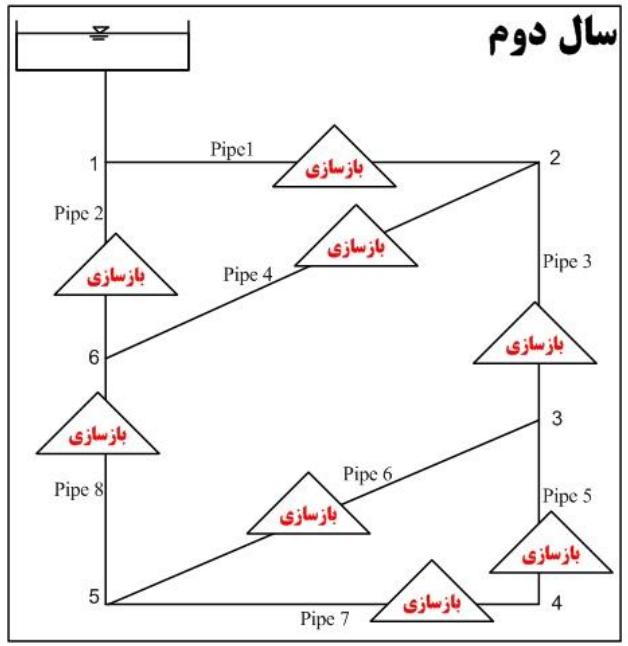
متغییرهای تصمیم: میزان برداشت از چاه ها، میزان برداشت از رودخانه و مخزن سد

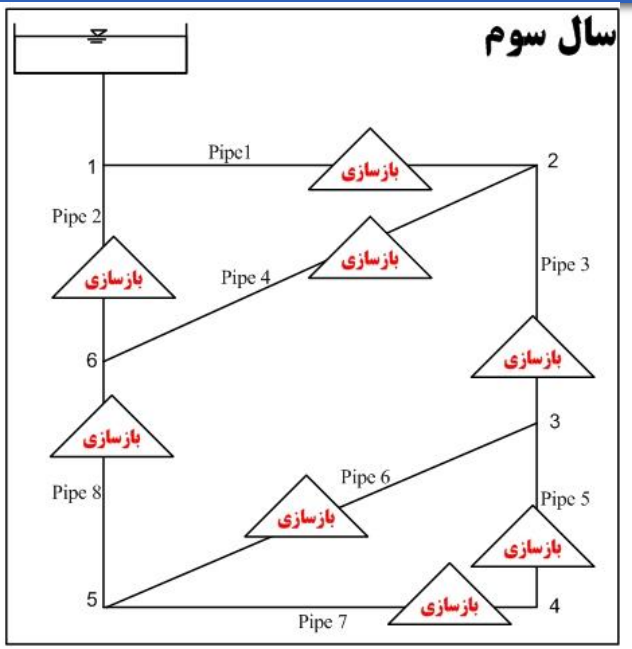
نمونه هایی از مسائل بهینه سازی منابع آب

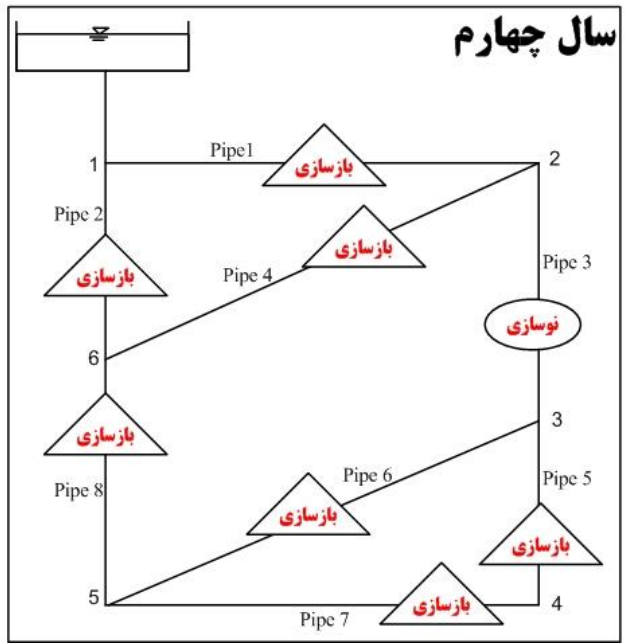
ساختار مدل بهینه بهره برداری دینامیکی از یک شبکه توزیع آب

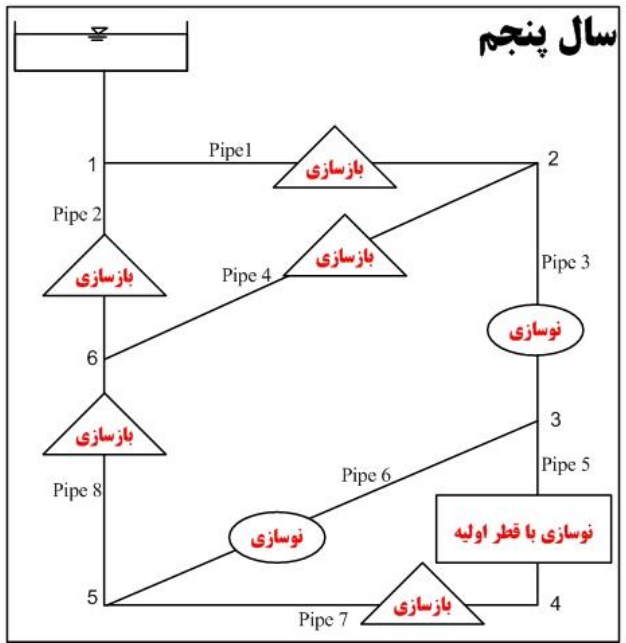
متغییر تصمیم: قطر لوله شبکه ها جهت بازسازی و نوسازی











اهداف این مسأله می تواند ارائه برنامه زمان‌بندی و سیاست‌های بهینه بازسازی و نوسازی جهت مدیریت بهره‌برداری میان‌مدت (به عنوان مثال ۵ ساله) از شبکه‌های توزیع آب با حداقل هزینه کل سیستم و حداکثر قابلیت اطمینان برای طول عمر باقیمانده شبکه نمونه به طوری که کلیه قیود هیدرولیکی در سطح استاندارد ارضاء شوند، می‌باشد.

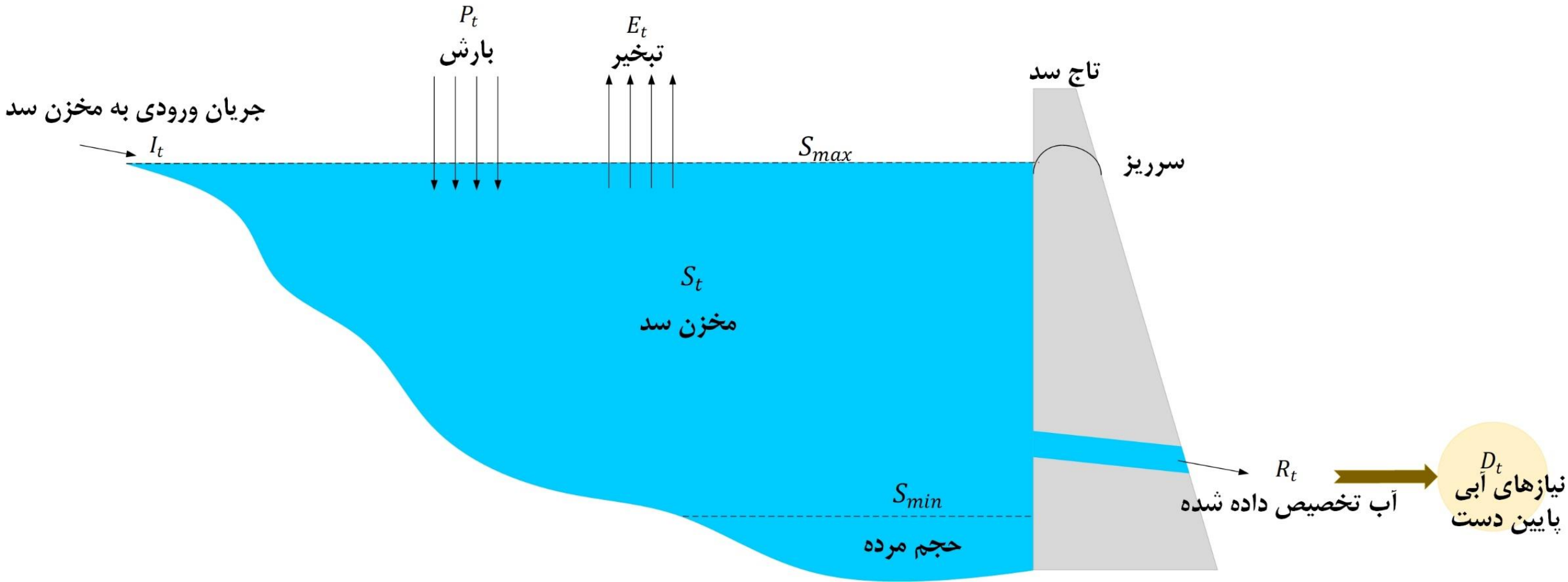
نحوه تعریف تابع هدف و محدودیت ها در مسائل بهینه سازی

تعریف تابع هدف و محدودیت ها

تابع هدف (Objective Function) در واقع معیاری است که بر اساس آن، جواب بهینه محلی و یا کلی استخراج می شود. این تابع که بر اساس متغییرهای تصمیم اقدام به محاسبه هدف مدنظر می نماید، می تواند به صورت خطی و غیرخطی باشد و از ساده ترین شکل ریاضی ترکیب متغییرها تا پیچیده ترین روابط ریاضی را پشتیبانی می کند. با توجه به اینکه متغییرهای تصمیم مورد استفاده در تابع هدف نمایانگر یکی از متغییرهای طبیعی می باشند و تمامی پدیده های طبیعی به صورت نامحدود موجود نمی باشند لذا دارای محدودیت بوده و این محدودیت ها باید به نحوه مطلوبی در فرآیند تدوین ساختار مدل های بهینه مورد توجه قرار گیرد. در این بخش انواع مختلفی از تابع هدف به همراه محدودیت های مرتبط با آن برای مفاهیم مختلف منابع آب مورد بررسی قرار گرفته و بیان ریاضی آن ها ارائه می شود.

نحوه تعریف تابع هدف و محدودیت ها در مسائل بهینه سازی

۱- مدلسازی مخزن سد: اهداف مختلفی در مدلسازی مخزن سد مطرح می باشد که مهمترین آن، تأمین نیازهای آبی پایین دست و حداقل نمودن میزان عدم تأمین نیاز می باشد. پارامترهای مؤثر در این مدلسازی عبارتند از: میزان جریان ورودی به مخزن سد، حداقل و حداکثر حجم مخزن سد، میزان آب تخصیص داده شده، میزان تبخیر از سطح مخزن، میزان بارش بر سطح مخزن



نحوه تعریف تابع هدف و محدودیت ها در مسائل بهینه سازی

بیان ریاضی شکل های مختلفی از تابع هدف و محدودیت های مرتبط با مدلسازی مخزن سد به صورت زیر می باشد:

حداقل نمودن میزان عدم تأمین نیاز به صورت بی بعد

$$Minimize\ \mathrm{f} = \sum_{t=1}^{T} \left(\frac{R_t - D_t}{D_t} \right)^2$$

حداقل نمودن میزان کمبود آب

$$Minimize\ \mathrm{f} = \sum_{t=1}^{T} (R_t - D_t)^2$$

حداکثر نمودن اطمینان پذیری حجمی تخصیص به نیازها

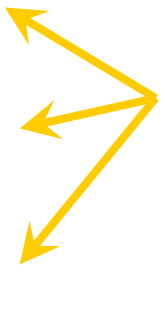
$$Maximize\ \mathrm{f} = \sum_{t=1}^{T} (R_t / D_t)$$

قابلیت اطمینان (اطمینان پذیری) یعنی احتمال این که شکستی در بهره‌برداری از سیستم در مدت زمانی مشخص رخ ندهد. بر مبنای این تعریف، قابلیت اطمینان نقطه مقابل مفهوم ریسک می‌باشد که احتمال شکست سیستم در یک مدت زمان مشخص است. این شاخص نشان‌دهنده میزان تأمین اهداف سیستم است و یکی از مهمترین شاخص‌ها برای بررسی کارایی سیاستهای بهره‌برداری از سیستم‌های منابع آب در شرایط عادی می‌باشد.

در این مسأله، R_t (میزان آب تخصیص داده شده به نیازها) به عنوان متغییر تصمیم مطرح می باشد.

نحوه تعریف تابع هدف و محدودیت ها در مسائل بهینه سازی

جهت در نظر گرفتن اطمینان‌پذیری سیستم از سه نوع اطمینان‌پذیری می توان استفاده نمود:



دوره ای — Occurrence Reliability

زمانی — Temporal Reliability

حجمی — Volumetric Reliability

اطمینان‌پذیری دوره ای: عبارت است از نسبت تعداد دوره‌هایی که سیستم در حالت موفقیت قرار داشته به تعداد کل دوره‌های برنامه‌ریزی

اطمینان‌پذیری زمانی: عبارت است از نسبت مدت زمانی که سیستم در حالت موفقیت قرار داشته به کل مدت زمان دوره برنامه‌ریزی (تنظیم فاصله بین دو دوره مطلوب)

اطمینان‌پذیری حجمی: عبارت است از نسبت حجم کل آب تخصیص داده شده به سیستم به حجم کل نیاز آبی سیستم

حداکثر نمودن اطمینان پذیری کل سیستم

$$Maximize\ \mathrm{f} = \sum_{t=1}^{T} \left(\mu_t^{Vol}\right) + \mu^{Tem} + \mu^{Occ}$$

علت در نظر گرفتن این سه نوع اطمینان‌پذیری این است که ممکن است میزان آب تخصیص داده شده نزدیک به حجم آب مورد نیاز سیستم باشد اما توزیع آن در یک افق زمانی مشخص ناهمنگ و بعضاً در یک دوره خاص و با مدت زمان اندک صورت پذیرد. لذا جهت بالا بردن اطمینان‌پذیری سیستم به صورت متعادل لازم است توزیع حجمی و زمانی آن مناسب باشد.

نحوه تعریف تابع هدف و محدودیت ها در مسائل بهینه سازی

α و β: ضریبی است که با توجه به نظر تأمین‌کننده آب مشخص می‌گردد.

NTS: تعداد دوره‌هایی که سیستم با موفقیت روبرو بوده است.

MDT: حداکثر فاصله زمانی بین دو دوره زمانی مطلوب

برای تعیین دوره های مطلوب سیستم از روابط زیر استفاده می شود:

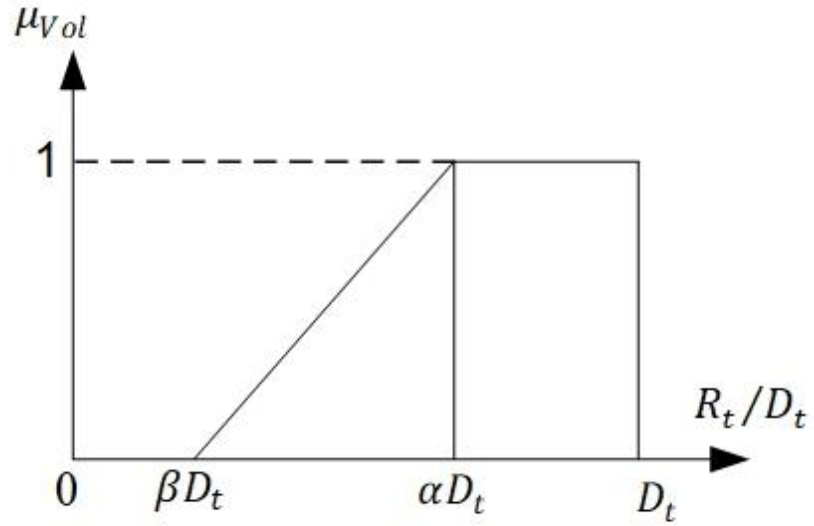
$$AP_t = A_t/A$$

$$Z_t = \begin{cases} 1 & , \quad if\, AP_t \geq \alpha \\ 0 & , \quad otherwise \end{cases}$$

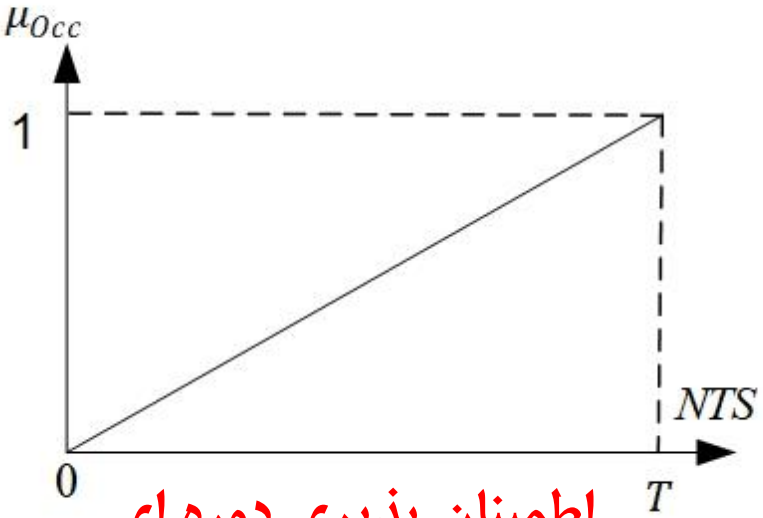
A_t: سطح زیر منحنی درجه عضویت اطمینان پذیری حجمی در زمان t

A: سطح کل زیر منحنی تابع عضویت اطمینان پذیری حجمی

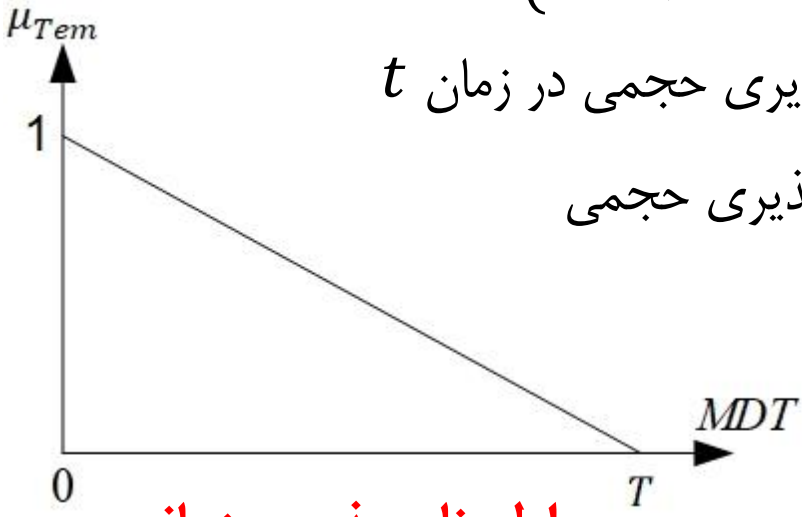
هرچه حداکثر فاصله زمانی بین دوره های مطلوب افزایش یابد، درجه عضویت آن نیز کاهش می یابد.



اطمینان پذیری حجمی



اطمینان پذیری دوره ای



اطمینان پذیری زمانی

نحوه تعریف تابع هدف و محدودیت ها در مسائل بهینه سازی

محدودیت هایی که لازم است مورد توجه قرار گیرد عبارتند از:

محدودیت حجم مخزن: میزان آب ذخیره شده در مخزن سد دارای مقادیر کمینه و بیشینه‌ای است. حداقل آب ذخیره شده متناظر با حجم مرده یا کمینه حجم مخزن در رقوم کمینه بهره‌برداری است. حداکثر آن برابر با حداکثر ظرفیت مخزن یا حجم مخزن در رقوم نرمال مخزن است.

$$S_{min} \leq S_t \leq S_{max}$$

رابطه پیوستگی: بیان‌کننده‌ی این است که میزان حجم مخزن در ماه آینده به میزان حجم مخزن در ماه جاری، میزان بارش، میزان تبخیر از سطح دریاچه، میزان ورودی و خروجی به مخزن بستگی دارد. در فرآیند بهینه‌سازی چنانچه مقدار حجم مخزن به دست آمده از حجم حداقل و حداکثر آن تجاوز نکند، می‌توان حجم ماه بعدی را توسط رابطه زیر بدست آورد.

رابطه اول

$$S_{t+1} = S_t + I_t - E_t \times Aave_t \times 0.001 + P_t \times Aave_t \times 0.001 - R_t$$

رابطه دوم

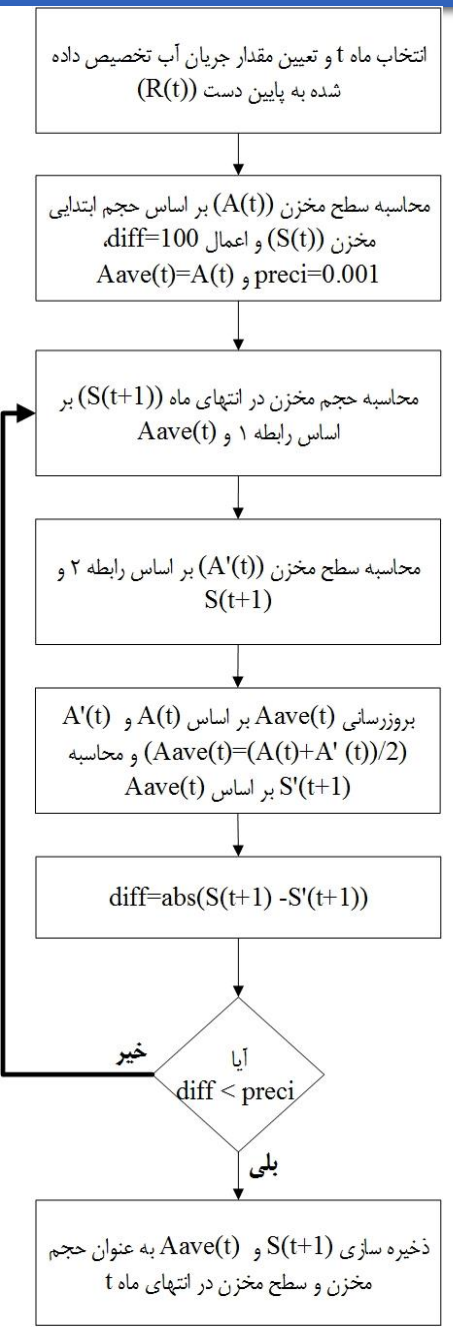
$$A_t = -6 \times 10^{-9} \times S_{t+1}^4 + 2 \times 10^{-6} \times S_{t+1}^3 - 0.0004 \times S_{t+1}^2 + 0.0398 \times S_{t+1} + 0.1904$$

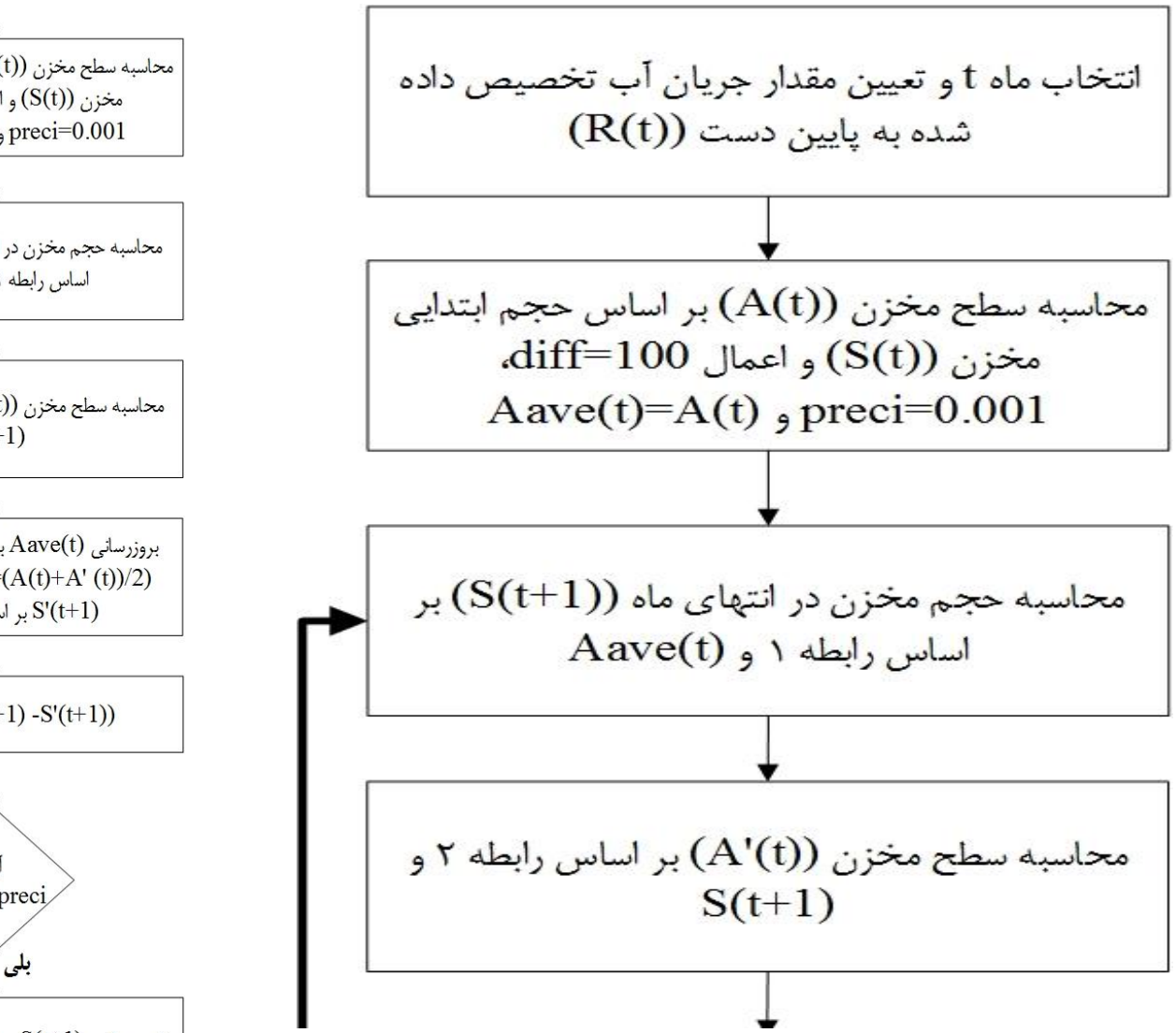
با توجه به مشخص نبودن مقدار حجم مخزن در انتهای ماه، لازم است مقدار سطح مخزن که به حجم وابسته است به صورت سعی و خطا تعیین شود.

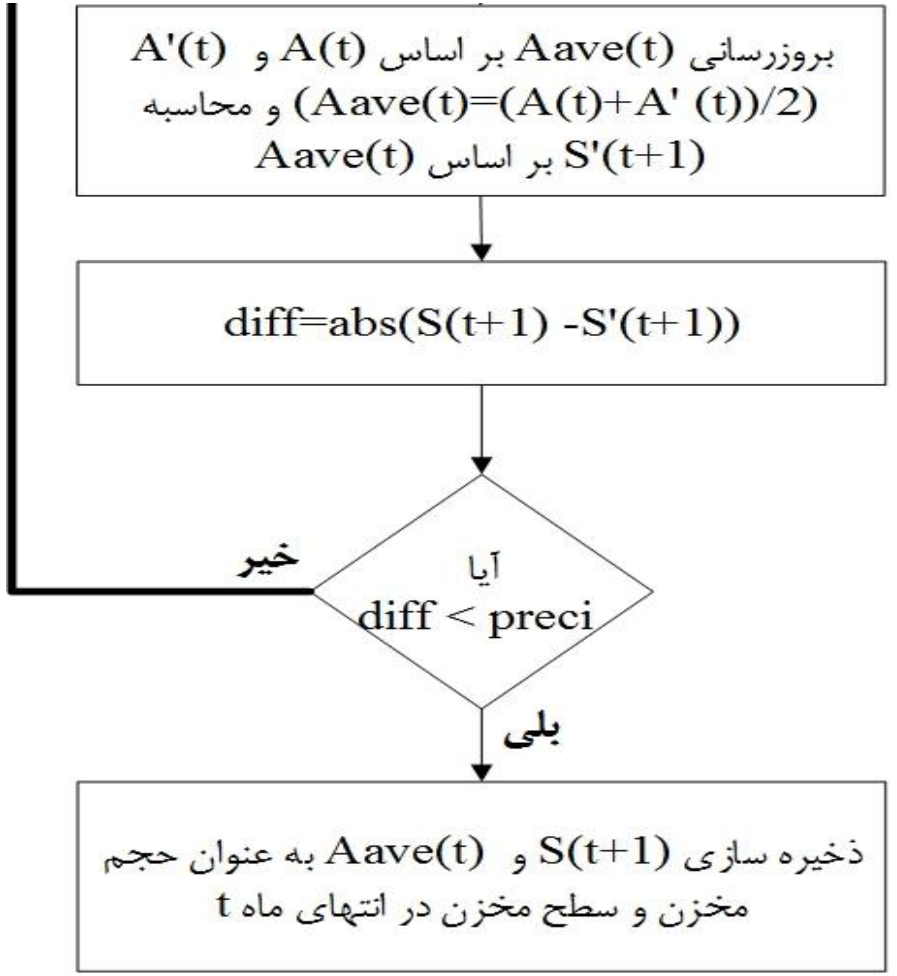
$$\acute{A}_t = f(S_{t+1})$$

نحوه تعریف تابع هدف و محدودیت ها در مسائل بهینه سازی

محدودیت هایی که لازم است مورد توجه قرار گیرد عبارتند از:







نحوه تعریف تابع هدف و محدودیت ها در مسائل بهینه سازی

زمانی که آب ذخیره شده در مخزن در طی یک سال مورد استفاده قرار نگیرد، جهت استفاده در سال های آتی ذخیره می شود. بهترین حالت بهره برداری از مخزن آن است که حجم مخزن در انتهای دوره شبیه سازی پس از تأمین نیازهای آبی بیشتر از میزان حجم مخزن در ابتدای ماه باشد. این شرایط به عنوان شرایط انتقال ذخیره (Carry-over) نامیده می شود.

$$S_1 \leq S_T$$

سرریز از مخزن: در صورتی که مقدار حجم بدست آمده در هر دوره (ماه) بیشتر از حداکثر مقدار حجم مخزن باشد، سرریز از مخزن رخ می دهد. تحت این شرایط حجم مخزن برابر با حجم حداکثر خواهد شد.

$$Spill_t = \begin{cases} S_{t+1} - S_{max} & if \quad S_{t+1} > S_t \\ 0 & otherwise \end{cases}$$

۲- مدلسازی شبکه توزیع آب شهری: یکی از موضوعات مهم و کاربردی در مدلسازی شبکه های توزیع آب، نوسازی و بازسازی لوله های شبکه در طی دوره بهره برداری با توجه به مدل های شبیه سازی هیدرولیکی و مدل های پیش بینی نرخ شکست می باشد. بنابراین می توان هدف ارائه برنامه زمان‌بندی و سیاست‌های بهینه بازسازی و نوسازی جهت مدیریت بهره‌برداری میان‌مدت (۵ ساله) از شبکه‌های توزیع آب با حداقل هزینه کل سیستم و حداکثر قابلیت اطمینان برای طول عمر باقیمانده شبکه نمونه به طوری که کلیه قیود هیدرولیکی در سطح استاندارد ارضاء شوند، را جهت مدلسازی مورد توجه قرار داد.

نحوه تعریف تابع هدف و محدودیت ها در مسائل بهینه سازی

هزینه کل سیستم شامل هزینه بازسازی لوله‌های موجود، هزینه نوسازی با قطر اولیه موجود، هزینه نوسازی با هر قطری و هزینه بازسازی بعد از هر جایگزینی با کلیه عملیات مورد نیاز مثل حفاری، خاکبرداری و خاکریزی و..... می‌باشد. روند بازسازی و نوسازی شبکه برای یک دوره برنامه‌ریزی ۵ ساله شامل اقداماتی به شرح ذیل می تواند باشد:

- ✓ بازسازی (تعمیر) یک یا چند لوله
- ✓ نوسازی (تعویض) با همان قطر موجود یا با سایر اقطار مجاز یک یا چند لوله در شبکه
- ✓ بازسازی یک یا چند لوله در شبکه بعد از جایگزینی آن‌ها

از این رو در طی فرآیند بهینه‌سازی برای هر لوله ممکن است سه حالت در نظر گرفته شود که شامل: وضعیت لوله، قطر لوله جدید (در مورد جایگزینی لوله) و سال بازسازی و یا نوسازی می‌باشد.

با توجه به اهداف اشاره شده بیان ریاضی مدل بهینه سازی به صورت مقابل خواهد بود:

$$Maximize\ \left(Min(Reliability_t)\right) \quad , \quad t = 1,2,3,\dots,ny$$

$$Minimize\ \left(\sum_{t=1}^{ny}\sum_{l=1}^{nP} Cost_{tl}\right)$$

nP: تعداد لوله های شبکه و ny، تعداد سال‌های دوره برنامه‌ریزی می باشد.

نحوه تعریف تابع هدف و محدودیت ها در مسائل بهینه سازی

$Reliability_t$: شاخص‌های قابلیت اطمینان شبکه در سال t

$$\mathrm{Re}liability_t = \frac{\sum_{j=1}^{Nn} R_{tj} Q_{tj}^{req}}{Q_{tN}^{req}}$$

Nn: تعداد گره های شبکه

R_{tj}: قابلیت اطمینان هیدرولیکی گره jام در سال t

Q_{tj}^{req}: دبی مورد نیاز گره jام در سال t

Q_{tN}^{req}: کل دبی مورد نیاز شبکه در سال t

$$R_{tj} = P(0) \sum_{M=0}^{Np} \left(\left(\frac{Q_{tj}^{avl}(M)}{Q_{tj}^{req}} \right) \times \left(\prod_{l=1}^{M} \frac{(1-a_l)}{a_l} \right) \right)$$

احتمال سلامت و کارکرد مطلوب همه لوله‌های شبکه

قابلیت اطمینان مکانیکی لوله lام

Q_{tj}^{avl}: دبی قابل دسترس گره jام در سال t

$$P(0) = \prod_{l=1}^{Np} a_l$$

رابطه کلی قابلیت کاربری به عنوان قابلیت اطمینان مکانیکی لوله lام:

متوسط زمان بین شکست‌ها

$$a_l = \frac{MTBF}{MTBF + MTTR}$$

متوسط زمان تعمیر لوله

بنابراین با داشتن اطلاعات مربوط به حوادث لوله، به گونه‌ای که برای هر لوله تاریخ وقوع حادثه و زمان صرف شده برای تعمیر هر حادثه مشخص باشد، امکان محاسبه قابلیت کاربری وجود خواهد داشت.

نحوه تعریف تابع هدف و محدودیت ها در مسائل بهینه سازی

روابط تجربی زیادی جهت محاسبه قابلیت اطمینان مکانیکی بر اساس قابلیت کاربری وجود دارد:

رابطه Ang and Tang:

$$a_l = \frac{\alpha_l}{\alpha_l + \beta_l}$$

α_l: تعداد تعمیرات مورد انتظار برای لوله lام در واحد زمان می‌باشد و مقدار آن از تقسیم تعداد حوادث سالانه لوله‌های با جنس خاص بر تعداد روزهای یکسال با واحد تعداد تعمیرات در هر روز بدست می‌آید.

β_l: تعداد شکستگی‌های لوله در واحد زمان می‌باشد و طبق رابطه زیر بدست می‌آید:

$$\beta_l = L_l \times FR_l$$

در این رابطه FR_l، نرخ شکست لوله lام می باشد.

رابطه Mays و Walski and Pelliccia:

$$a_l = \frac{0.21218 D_l^{1.462131}}{(0.00074 D_l^{0.285} + 0.21218 D_l^{1.462131})} \quad , \quad \forall l = 1, ..., np$$

D_l: قطر لوله بر حسب میلیمتر

نحوه تعریف تابع هدف و محدودیت ها در مسائل بهینه سازی

جزئیات تابع هدف مرتبط با هزینه کل سیستم

هزینه تعویض لوله l ام در سال t

هزینه تعمیر و نگهداری لوله تعویضی l ام در سال t

$$Cost_{lt} = \begin{cases} \left(F_{replace}\right)_{lt} + \left(F_{repair}^{newpipe}\right)_{lt} & , \quad if \;\; D_{lt} \neq D_l^{initial} \\ \left(F_{repair}^{oldpipe}\right)_{lt} & , \quad if \;\; D_{lt} = D_l^{initial} \;\; and \;\; \left(F_{repair}^{oldpipe}\right)_{lt} < \left(F_{replace}\right)_{lt} + \left(F_{repair}^{newpipe}\right)_{lt} \\ \left(F_{replace}\right)_{lt} + \left(F_{repair}^{newpipe}\right)_{lt} & , \quad if \;\; D_{lt} = D_l^{initial} \;\; and \;\; \left(F_{repair}^{oldpipe}\right)_{lt} > \left(F_{replace}\right)_{lt} + \left(F_{repair}^{newpipe}\right)_{lt} \end{cases}$$

هزینه تعمیر و نگهداری لوله l ام در سال t

فاکتور هزینه مرتبط با نرخ شکست

نرخ بهره

$$\left(F_{repair}^{oldpipe}\right)_{lt} = K \times FR_{lt} \times bc_{lt} \times L_l \times BCF \times t/(1+r)^t$$

طول لوله l ام (متر)

نرخ شکست لوله l ام در سال t

ضریب هزینه تعمیر و نگهداری لوله l ام در سال t

جدول فاکتور BCF مرتبط با نرخ شکست

نوع کاربری	مسکونی	صنعتی	مسکونی/صنعتی	تجاری	جاده اصلی	مناطق روستایی
BCF	۱/۵	۱/۵	۱/۵	۳	۳	۱

نحوه تعریف تابع هدف و محدودیت ها در مسائل بهینه سازی

$$\left(F_{repair}^{newpipe}\right)_{lt} = K \times FR_{lt} \times bc_{lt} \times L_l \times BCF \Big/ (1+r)^t$$

هزینه تعمیر و نگهداری لوله تعویضی lام در سال t

$$\left(F_{replace}\right)_{lt} = Crep_{lt} \times L_l \Big/ (1+r)^t$$

هزینه تعویض لوله lام در سال t

ضریب هزینه تعویض لوله lام در سال t

روابط ارائه شده برای ضرایب هزینه بازسازی و نوسازی لوله‌های با اقطار مختلف بر مبنای مطالعات قبلی و با استفاده از رگرسیون خطی استخراج گردید.

$$bc_{lt} = 0.85 \times D_{lt} + 495.42$$

$$Crep_{lt} = 0.22 \times D_{lt} + 41.22$$

$$FR_{lt} = f(D_{lt}, L_l, Ag_l, P_{lt}, H_l)$$

قطر لوله lام در سال t

طول لوله lام

سن لوله lام

عمق نصب لوله lام

هد فشاری قابل دسترس گره jام در سال t

$$P_{lt} = \frac{\left(\left(H_{tj}^{avl} - H_j^{\min}\right)^{ini} + \left(H_{tj}^{avl} - H_j^{\min}\right)^{end}\right)\Big/2}{10}$$

میزان فشار لوله lام در سال t (اتمسفر)

حداقل مطلق هد فشاری گره jام

نحوه تعریف تابع هدف و محدودیت ها در مسائل بهینه سازی

محدودیت های مسأله مورد بررسی:

$$V_{lt} = 0.3545 \times CHw_{lt} \times D_{lt}^{0.63} \times S_{lt}^{0.54}$$

V_{lt}: میزان سرعت لوله lام در سال t

CHw_{lt}: ضریب هیزن لوله lام در سال t

S_{lt}: شیب هیدرولیکی لوله lام در سال t

با توجه به اینکه شرایط هیدرولیکی و خصوصیات فیزیکی حاکم بر لوله‌ها در طول زمان متغیر می‌باشد و شاخص نشان دهنده این خصوصیت تغییر ضریب زبری لوله‌ها است لذا جهت در نظر گرفتن تأثیر زمان سپری شده از بهره‌برداری، مشخصات هندسی و خصوصیات مایع درون لوله، ضریب هیزن ویلیامز را با توجه به جداول ارائه شده توسط کتاب Bhave and Gupta, (2006) به صورت رابطه زیر ارائه گردید. مطابق این رابطه لوله‌هایی که نو بوده و از کارکرد پایینی برخوردار می باشند دارای ضریبی بالاتر و با گذشت زمان این مقدار روند کاهشی پیدا می نماید و نشانگر افزایش افت انرژی می‌باشد. جهت تعیین این رابطه به این صورت عمل شده که با استفاده از داده‌های بدست آمده از مرجع فوق که مشتمل بر مقادیر ضریب هیزن ویلیامز به ازای قطرهای مختلف و برای زمان‌های متفاوت و همچنین با توجه به کیفیت مطلوب آب می‌باشد، بهترین رابطه رگرسیونی غیرخطی مشخص شده و ضرایب بدست آمده است.

$$CH_{lt} = 0.3974 \times t^{0.4791} + 0.9939 \times \left(log(D_{lt})\right)^{0.6045}$$

CH_{lt}: ضریب هیزن لوله lام در سال t

نحوه تعریف تابع هدف و محدودیت ها در مسائل بهینه سازی

محدودیت های سرعت جریان آب در لوله و میزان هد در دسترس:

$$V_{\min} \le V_{lt} \le V_{\max}$$

$$H_j^{\min} \le H_{tj}^{avl} \le H_j^{des}$$

H_j^{des}: میزان هد مطلوب گره jام

$H_j^{\min}$: حداقل مطلق هد فشاری گره jام

۳- مدلسازی جهت برداشت از چاه های آبخوان: با توجه به تعدد چاه های بهره برداری واقع در آبخوان های آبرفتی و برداشت بیش از ظرفیت سفره های زیرزمینی، تعیین سیاست های بهینه برداشت از هر یک از چاه ها در جهت بهره برداری پایدار از آبخوان ها ضروری است. بر این اساس با توجه به هزینه های پمپاژ و محدودیت های مرتبط با برداشت از هر چاه، تابع هدف می تواند به صورت حداقل نمودن میزان عدم تأمین نیاز و حداقل نمودن هزینه انتقال آب به بخش‌های واقع در مناطق نیاز تعریف شود.

چنانچه هدف تعیین میزان تخصیص بهینه از ۱۰ حلقه چاه به ۵ منطقه نیاز مرتبط با بخش های هوانوردی و بخش غیرهوانوردی شهر فرودگاهی باشد، لازم است متغییرهای تصمیم برای هر ماه به صورت میزان ماهانه آب برداشت شده از ۱۰ حلقه چاه در طی دوره برنامه ریزی (۵ سال) تعریف شود. بر این اساس تعداد متغییرهای تصمیم برابر با ۶۰۰ = ۱۲ (ماه) ×۵ (سال)×۱۰ (حلقه چاه) خواهد بود.

نحوه تعریف تابع هدف و محدودیت ها در مسائل بهینه سازی

توابع هدف مدنظر در این مسأله عبارتند از:

$$Minimize\ Z_1 = \sum_{t=1}^{m}\left(\left(\sum_{d=1}^{nD} DM_{td} - \sum_{z=1}^{nwell} AW_{tz}\right)\times \alpha\right)^2$$

DM_{td}: نیاز آبی بخش d در ماه t

AW_{tz}: میزان آب تخصیص داده شده از چاه z در ماه t

α: ضریبی است که جهت تدقیق میزان آب تخصیص داده شده به نیازها مورد استفاده قرار می‌گیرد که به عنوان مثال می تواند برابر با ۱۰۰۰ انتخاب شود. در واقع این ضریب، اختلاف های کوچک بین تخصیص و نیاز را بزرگ جلوه می دهد تا مدل بتواند تخصیص بالایی به نیازها داشته باشد.

$$Minimize\ Z_2 = \sum_{t=1}^{m}\sum_{z=1}^{nwell} AW_{tz}\times cost_z$$

$cost_z$: میزان هزینه واحد آب انتقال یافته از چاه zام

محدودیت های این مدلسازی می تواند عبارات زیر در نظر گرفته شود:

$$AW_{tz} \le Qwell_z \quad , \quad z = 1,2,\ldots,nwell \quad , \quad t = 1,2,\ldots,m$$

در این محدودیت، میزان مجاز برداشت از هر چاه واقع در محدوده مورد مطالعه چک می شود تا برداشتی بیش از مقدار تعیین شده (مطابق پروانه بهره‌برداری) برای آن در نظر گرفته نشود.

نحوه تعریف تابع هدف و محدودیت ها در مسائل بهینه سازی

مقدار افت تراز سطح آب زیرزمینی در چاه z در نتیجه برداشت به میزان AW_{tz} در ماه t:

شعاع چاه بهره برداری zام

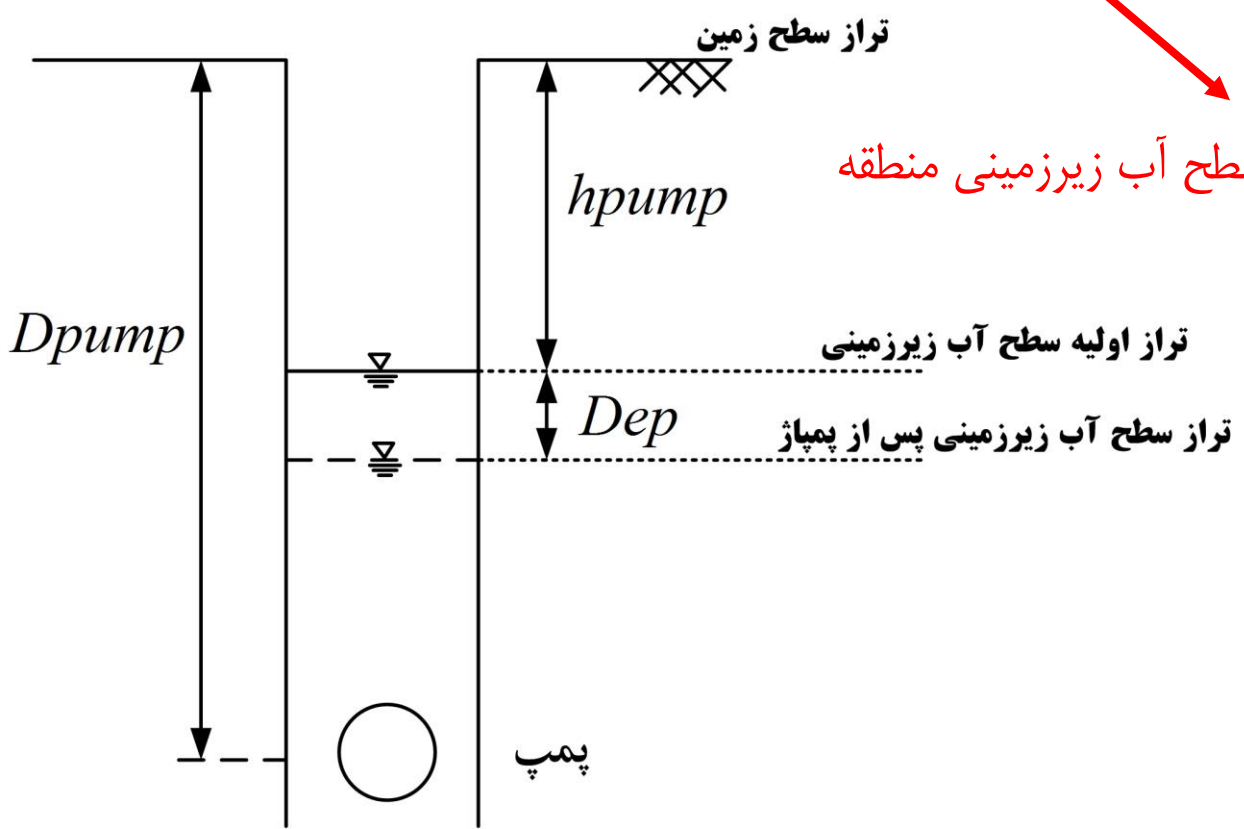
حریم چاه (معمولاً ۵۰۰ متر است.)

$$Dep_{tz} = 0.3858 \times \frac{2.3 \times AW_{tz} \times \log(rw / r_z)}{2\pi T}$$

حداقل مقدار هد آب روی پمپ در هر چاه در حال بهره‌برداری (به عنوان مثال ۲۰ متر می توان در نظر گرفت)

$$Dpump_z - (Dep_z + hpump_z + m \times \Delta h) \geq h_{min}$$

میزان افت ماهانه تراز سطح آب زیرزمینی منطقه



از آنجا که جهت برداشت از هر چاه لازم است یک هد آب بالای پمپ وجود داشته باشد که در صورت کاهش آن ممکن است پمپ‌ها هوا کشیده و کارآیی خود را از دست بدهند. برای این منظور حداقل هد آب بالای پمپ باید برابر با h_{min} در نظر گرفته شود.

نحوه تعریف تابع هدف و محدودیت ها در مسائل بهینه سازی

متغییرهای تصمیم مسأله که میزان تخصیص آب از هر یک از چاه ها در هر ماه است نمی توانند مقادیر منفی را اختیار نمایند:

$$AW_{tz} \geq 0 \quad , \quad z = 1,2,\ldots,nwell \quad , \quad t = 1,2,\ldots,m$$

۴- بهره برداری کمی و کیفی پایدار از سفره های زیرزمینی: بهره‌برداری بی‌رویه از منابع آب زیرزمینی و عدم مدیریت صحیح در حفاظت کمی و کیفی از آن‌ها، خسارات جبران‌ناپذیری به بار آورده و آینده بهره‌برداری از این منابع را به خطر انداخته است. یکی از مهم‌ترین پارامترهای آلاینده آب زیرزمینی که درنتیجه تزریق قابل‌توجه فاضلاب‌های شهری به سفره‌های زیرزمینی رخ می‌دهد، آلودگی نیترات می‌باشد. بنابراین مدیریت بهره‌برداری از منابع آب زیرزمینی بخصوص با توجه به توسعه این نوع از آلودگی به گونه‌ایی که در طول یک دوره برنامه‌ریزی بلندمدت موجبات کاهش این پارامتر آلوده‌کننده را فراهم نماید، لازم و ضروری است. بنابراین توسعه ساختاری که در آن بهره‌برداری از چاه‌های آب با توجه به وضعیت کیفی آبخوان، به‌گونه‌ای که منجر به پایداری بلندمدت این مخازن گردد، مورد توجه قرار گیرد می تواند منجر به ارائه دستورالعمل هایی گردد که از افت تصادعدی تراز سطح آب زیرزمینی و افزایش غلظت آلاینده های آن جلوگیری به عمل آورد.

نحوه تعریف تابع هدف و محدودیت ها در مسائل بهینه سازی

بر این اساس، توابع هدف زیر می تواند مورد توجه قرار گیرد:

- ✓ حداقل نمودن میزان افت تراز سطح آب زیرزمینی در چاه‌های محدوده موردمطالعه در طول دوره‌های زمانی مورد بررسی
- ✓ حداقل نمودن سری زمانی غلظت نیترات در چاه‌های بهره‌برداری
- ✓ حداقل نمودن میزان برداشت از سفره آب زیرزمینی

$$Minimize\ Z_1 = \sum_{t=1}^{m} \sum_{z=1}^{nwell} \Delta H_{tz}$$

میزان افت تراز سطح آب زیرزمینی مرتبط با چاه z در ماه t

$$Minimize\ Z_2 = \sum_{t=1}^{m} \sum_{z=1}^{nwell} Cwell_{tz}$$

غلظت نیترات در آب برداشتی از چاه z در ماه t

$$Minimize\ Z_3 = \sum_{t=1}^{m} \sum_{z=1}^{nwell} Qwell_{tz}$$

میزان آب برداشتی از چاه z در ماه t

در این مسأله، متغیرهای تصمیم در نظر گرفته شده برای هر ماه عبارتند از میزان ماهانه آب برداشت‌شده از چاه‌های موجود.

نحوه تعریف تابع هدف و محدودیت ها در مسائل بهینه سازی

$$Minimize\ Z_1 = \sum_{t=1}^{m} \sum_{z=1}^{nwell} \Delta H_{tz}$$

تابع هدف اول که حداقل نمودن میزان افت تراز سطح آب زیرزمینی در هر یک از چاه‌های در حال بهره‌برداری است، مورد توجه قرار گرفته است. بر اساس این رابطه، لازم است ابتدا سری زمانی تراز سطح آب زیرزمینی با استفاده از مدل کالیبره شده آبخوان مورد شبیه‌سازی قرار گیرد. این میزان که بر اساس رابطه زیر (این رابطه بر مبنای مدل شبیه‌سازی MODFLOW عمل می‌نماید و بر اساس آن وضعیت تراز سطح آب زیرزمینی و افت در هر یک از سلول‌های مورد شبیه‌سازی مشخص می شود) تعیین می‌شود، در واقع بیانگر رفتار کمی سفره در مواجه با منابع بهره‌برداری (چاه‌ها) بوده و کنترل آن می‌تواند نقش قابل‌توجهی در پایداری سفره زیرزمینی ایفا نماید. به عبارت دیگر کنترل افت ماهانه سطح آب زیرزمینی در چاه‌ها، علاوه بر کاهش هزینه‌های پمپاژ، در بهبود وضعیت کیفی آبخوان نیز در بلندمدت مؤثر بوده و از کسری مخزن و کاهش ضخامت اشباع منابع آب زیرزمینی جلوگیری به عمل می‌آورد.

$$\Delta H_{tz} = H_{tz} - H_{(t-1)z}$$

$$H_{tz} = f\left(Qwell_{tz}\ ,\ R_t\ ,\ H_{(t-1)z}\right)$$

R_t: میزان تغذیه طبیعی آبخوان در دوره t

H_t: تراز سطح آب زیرزمینی مرتبط با چاه zام در دوره t

نحوه تعریف تابع هدف و محدودیت ها در مسائل بهینه سازی

$$Minimize\ Z_2 = \sum_{t=1}^{m} \sum_{z=1}^{nwell} Cwell_{tz}$$

تابع هدف دوم رویکرد ارائه شده که کاهش غلظت نیترات در چاه‌های در حال بهره‌برداری است، محقق می‌شود. جهت تعیین میزان غلظت نیترات در هر یک از چاه‌ها لازم است مدل کالیبره شده کیفی سفره، که می تواند مدل MT3DMS باشد به ازای وضعیت‌های مختلف برداشت اجرا شود. این مقدار که بر مبنای رابطه زیر تعیین می‌شود بیانگر رفتار کیفی سفره در مواجه با تنش‌های ناشی از برداشت است. از آنجا که وضعیت موجود بهره‌برداری از سفره موجب افزایش غلظت نیترات به بیش از مقادیر حد مجاز شده است، لذا این اضافه برداشت توسط رابطه زیر کنترل می شود:

$$Cwell_{tz} = g\left(Qwell_{tz}, R_t, H_{(t-1)z}, Cwell_{(t-1)z}\right)$$

$$\mathrm{Qwell_{tz}} \le \mathrm{QCwell_{tz}} \quad , \quad \mathrm{z = 1,2,\ldots, nwell} \quad , \quad \mathrm{t = 1,2,\ldots, m}$$

$QCwell_{tz}$: وضعیت فعلی برداشت از چاه zام در دوره t

نحوه تعریف تابع هدف و محدودیت ها در مسائل بهینه سازی

$$Minimize\ Z_3 = \sum_{t=1}^{m} \sum_{z=1}^{nwell} Qwell_{tz}$$

سومین هدف مورد بررسی در این مسأله که نقش بسزایی در پایداری کمی و کیفی سفره ایفا می‌نماید، کمینه نمودن میزان برداشت از چاه های در حال بهره‌برداری است. در واقع در این هدف وضعیت نیازهای منطقه مورد توجه نبوده و بهره‌برداری بلندمدت از آبخوان و توجه به پایداری سفره در جهت بهبود وضعیت کیفی آبخوان در اولویت سیاست‌های برداشت می‌باشند.

با استفاده از این سه هدف تعریف شده، که به نوعی مکمل هم در برآورده شدن توسعه پایدار سفره است، می‌توان مقادیر بهینه تخصیص از هر یک از چاه‌های موجود در محدوده مورد مطالعه را تعیین و بر مبنای آن برنامه‌ریزی‌های لازم جهت تأمین کمبود نیازهای آبی محدوده را از سایر منابع آبی (همانند ذخایر آبی سطحی) اتخاذ نمود.

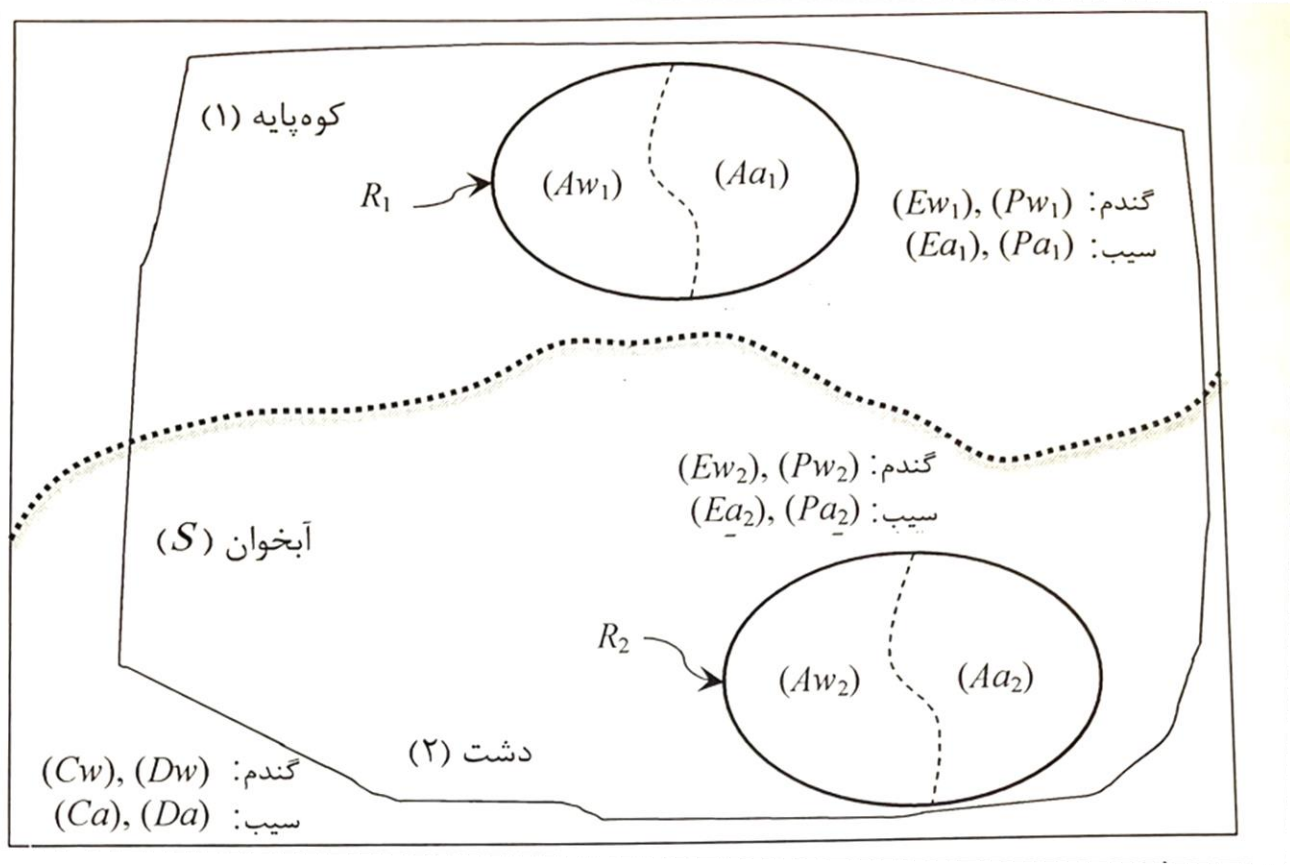
$$Qwell_{tz} \geq 0 \quad , \quad z = 1,2,\ldots,nwell \quad , \quad t = 1,2,\ldots,m$$

$$Cwell_{tz} \geq 0 \quad , \quad z = 1,2,\ldots,nwell \quad , \quad t = 1,2,\ldots,m$$

$$H_{tz} > 0 \quad , \quad z = 1,2,\ldots,nwell \quad , \quad t = 1,2,\ldots,m$$

نحوه تعریف تابع هدف و محدودیت ها در مسائل بهینه سازی

۵- بهره برداری از آبخوان: در شکل زیر دو واحد کشاورزی واقع شده در کوه و دشت نشان داده شده اند. هدف کسب بیشترین درآمد حاصل از فروش محصول های کشاورزی و باغی است. امکان کشت گندم و سیب در هر دو واحد کشاورزی وجود دارد و این دو محصول به ترتیب به قیمت واحد محصول برابر با Cw و Ca برحسب تومان بر واحد وزن محصول تولید شده به فروش می روند.



انتخاب مساحت زیر کشت برای گندم و یا سیب در اراضی کوه پایه (AW_1 و Aa_1) و یا دشت (AW_2 و Aa_2) به عنوان متغیرهای تصمیم مسأله می باشند. بازده برداشت محصول و همچنین مقدار نیاز آبی یا تبخیر و تعرق گیاه برای محصول های گندم و سیب در کوه پایه نیز به ترتیب معادل (PW_1 و EW_1) و (Pa_1 و Ea_1) و در دشت نیز به ترتیب معادل (PW_2 و EW_2) و (Pa_2 و Ea_2) است.

نحوه تعریف تابع هدف و محدودیت ها در مسائل بهینه سازی

از طرفی تأمین نیاز آبی محصول ها از آبخوان منطقه صورت می گیرد که به صورت پمپاژ به زمین های کوه پایه و دشت (R_1 و R_2) انجام می شود. حداکثر برداشت مجاز سالیانه از دشت معادل R_{max} بوده و کمترین مقدار تولید مورد نیاز محصول های گندم و سیب نیز معادل نیاز منطقه ای آن ها یعنی Dw و Da است. با توجه به داده های داده شده، مدل بهینه سازی جهت تعیین سطح بهینه زیر کشت محصولات در هر واحد کشاورزی را برای حداکثر نمودن میزان درآمد حاصل از فروش این محصولات ارائه نمائید.

تابع هدف

$$Z = Cw \underbrace{\sum_{i=1}^{2} (Aw_i \times PW_i)}_{\text{وزن محصول گندم تولید شده}} + Ca \underbrace{\sum_{i=1}^{2} (Aa_i \times Pa_i)}_{\text{وزن محصول سیب تولید شده}}$$

محدودیت ها

۱- محدودیت برداشت آب از آبخوان

$$\sum_{i=1}^{2} R_i \leq R_{max}$$

$$R_1 = (Aw_1 \times EW_1) + (Aa_1 \times Ea_1)$$

$$R_2 = (Aw_2 \times EW_2) + (Aa_2 \times Ea_2)$$

نحوه تعریف تابع هدف و محدودیت ها در مسائل بهینه سازی

ساختار مدل ریاضی مسئله بهینه سازی

$$Maximize\ Z = Cw \sum_{i=1}^{2} (Aw_i \times PW_i) + Ca \sum_{i=1}^{2} (Aa_i \times Pa_i)$$

$$subject\ to:$$

$$\sum_{i=1}^{2} R_i \leq R_{max}$$

$$R_1 = (Aw_1 \times EW_1) + (Aa_1 \times Ea_1)$$

$$R_2 = (Aw_2 \times EW_2) + (Aa_2 \times Ea_2)$$

$$\sum_{i=1}^{2} (Aw_i \times PW_i) \geq Dw$$

$$\sum_{i=1}^{2} (Aa_i \times Pa_i) \geq Da$$

۲- محدودیت تولید محصولات

$$\sum_{i=1}^{2} (Aw_i \times PW_i) \geq Dw$$

$$\sum_{i=1}^{2} (Aa_i \times Pa_i) \geq Da$$

خصوصیات مسائل بهینه سازی

مشخصه های یک مسئله بهینه سازی را می توان به دو بخش تقسیم نمود:

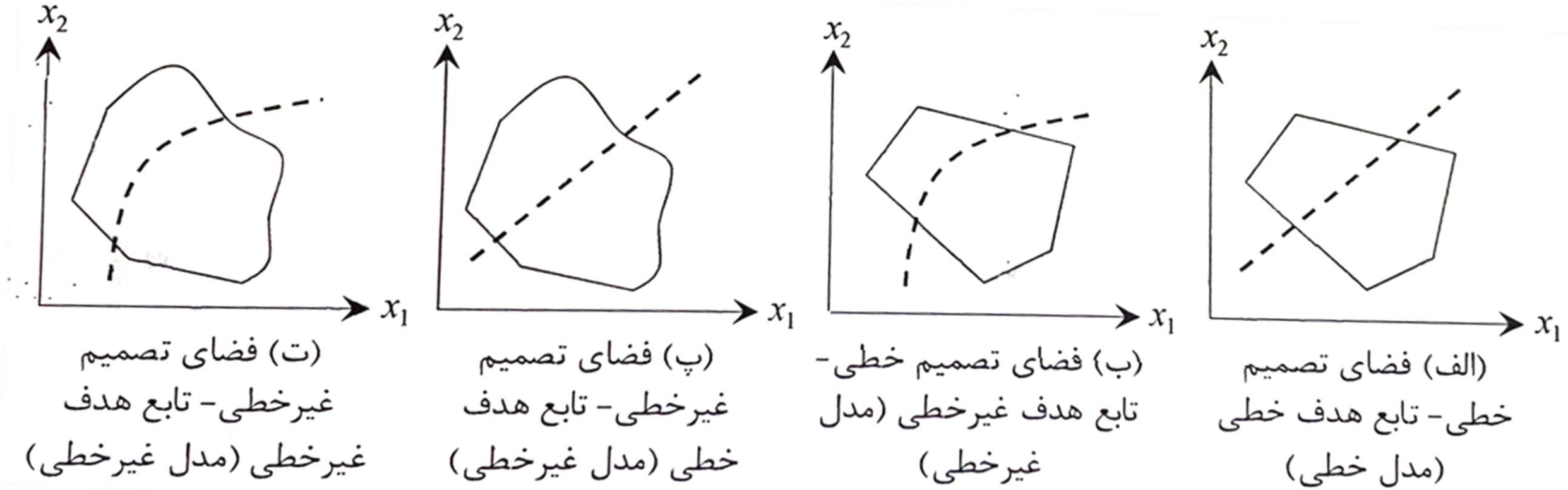
(۱) **خصوصیات مرتبط با تابع هدف و فضای تصمیم** (همانند خطی یا غیرخطی بودن، پیوسته یا ناپیوستگی، محدب یا مقعر، تفکیک پذیر یا تفکیک ناپذیر، تک قله ای یا چندقله ای بودن)

(۲) **خصوصیات مربوط به داده ها، نمایه ها و متغیرهای مدل** (همانند پیوسته یا ناپیوستگی، قطعی یا تصادفی و صریح یا فازی بودن آن ها)

مسائل خطی و غیرخطی

جهت حل مسائل بهینه سازی، تابع هدف و قیدهای مسئله در قالب یک مدل ریاضی ارائه می گردد. در صورتی که تمامی روابط موجود در مدل ریاضی مسئله (اعم از تابع هدف، رابطه های مدل شبیه سازی و رابطه های مرتبط با قیدها) خطی و پیوسته باشند به آن مسئله خطی (Linear Problems) گویند و در صورتی که **حتی یکی از این روابط** ذکر شده، غیرخطی یا ناپیوسته باشند، **مسئله را غیرخطی** (Non-Linear Problems) می نامند.

خصوصیات مسائل بهینه سازی



(الف) فضای تصمیم خطی- تابع هدف خطی (مدل خطی)

(ب) فضای تصمیم خطی- تابع هدف غیرخطی (مدل غیرخطی)

(پ) فضای تصمیم غیرخطی- تابع هدف خطی (مدل غیرخطی)

(ت) فضای تصمیم غیرخطی- تابع هدف غیرخطی (مدل غیرخطی)

الگوریتم های حل مسائل بهینه سازی خطی ساده تر بوده و توسعه یافته تر هستند. لذا تمایل به حل مسئله های بهینه سازی خطی در جامعه مهندسان و محققان بیشتر است. برای این منظور روش های خطی سازی (Linearization) مسئله های بهینه سازی غیر خطی نیز توسعه داده شده اند. بر این اساس می توان یک مسئله غیرخطی را ابتدا خطی و سپس آن را با روش های حل خطی بررسی نمود.

خصوصیات مسائل بهینه سازی

نکته ۱: روش های مدرن بهینه سازی نیز توسعه یافته اند که قادر به حل هر دو نوع مسئله خطی و یا غیر خطی می باشند. اما لازم است به این نکته توجه شود که در صورتی که استفاده از یک روش کلاسیک بهینه سازی، که مبنای ریاضی دارد، در یک مسئله مهندسی ممکن باشد، استفاده از روش های مدرن مبتنی بر سعی و خطا، منطقی نیست.

نکته ۲: در مسائل مهندسی منابع آب، به دلایل زیر مدل های غیرخطی در مسائل بهینه سازی توسعه بیشتری دارد:

(۱) وجود توابع هدف غیرخطی

(۲) مدل های شبیه سازی غیرخطی (ناشی از رابطه های دیفرانسیلی غیرخطی موجود در پدیده های حاکم بر سامانه های منابع آب)

(۳) وجود متغیرهای تصمیم ناپیوسته (همانند قطر لوله ها در شبکه های توزیع آب و ...)

مسائل پیوسته و ناپیوسته (صحیح، گسسته و دودویی)

در صورتی که انتخاب و یا تغییر در متغیرهای تصمیم در مسئله بهینه سازی در یک دامنه پیوسته صورت پذیرد **مسئله را پیوسته** (Continuous) گویند. مانند تعیین حجم آب خروجی از مخزن، میزان برداشت از منابع آب سطحی و زیرزمینی، تعیین مقدار پارامترهای یک مدل شبیه سازی و ...

خصوصیات مسائل بهینه سازی

در صورتی که انتخاب و یا به وجود آوردن تغییر در متغیر تصمیم مسئله در یک دامنه ناپیوسته (دارای مقدارهای گسسته و معین) صورت پذیرد **مسئله را ناپیوسته** (Dis-Continuous) می نامند. مانند طراحی تعداد پمپ های یک ایستگاه پمپاژ، تعیین مقدار بهینه قطر لوله های یک شبکه توزیع آب شهری بر اساس قطرهای تجاری موجود در بازار، تعداد و موقعیت چاه ها در یک شبکه پایش آب زیرزمینی، انتخاب و یا عدم انتخاب یک یا چند منبع آبی جهت بهره برداری و ...

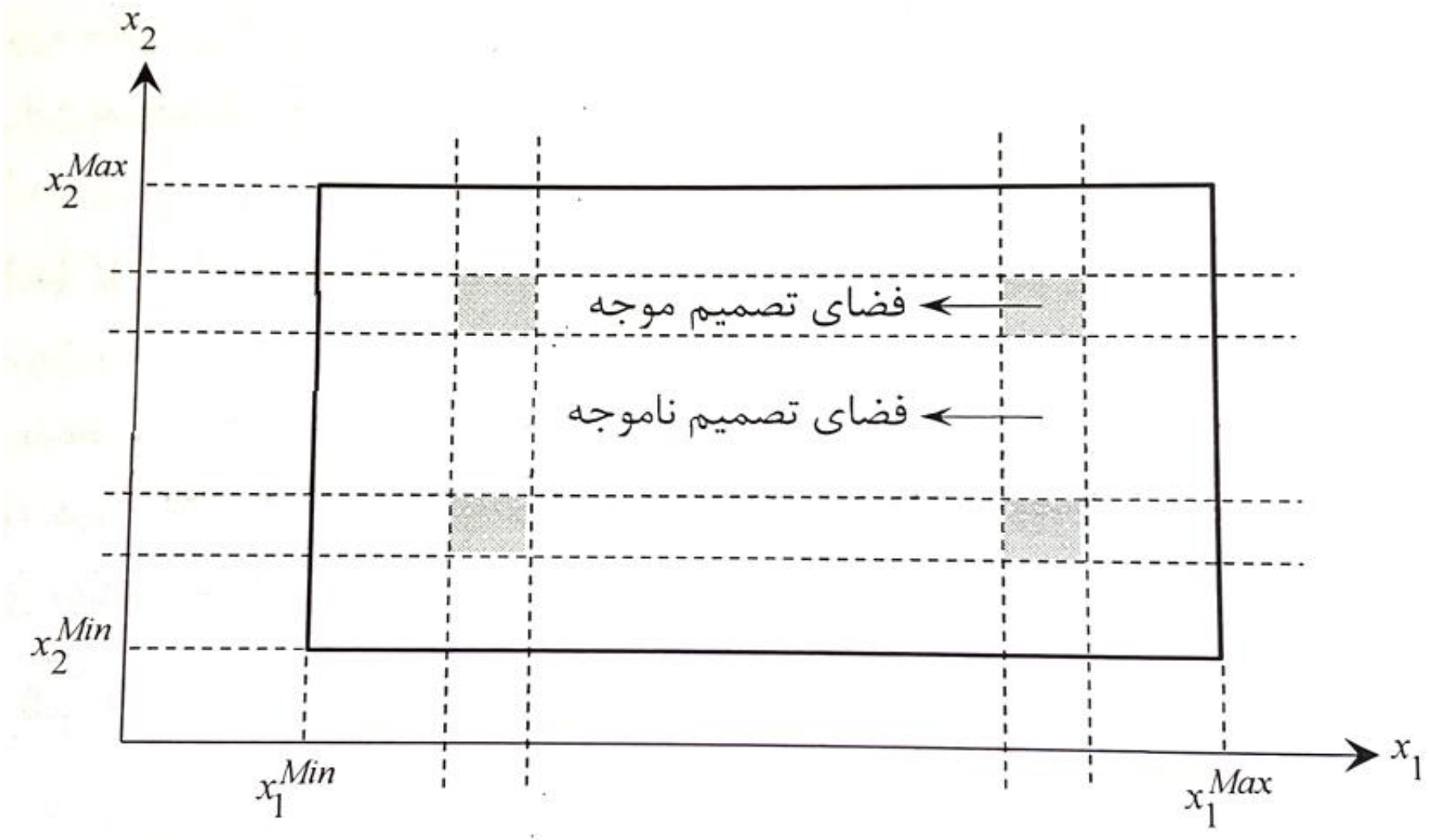
نکته ۱: انتخاب روش های حل مسئله های بهینه سازی به پیوسته و یا ناپیوسته بودن فضای تصمیم وابسته است. برخی روش های بهینه سازی قادر به حل مسئله های بهینه سازی در فضای تصمیم پیوسته هستند و برخی دیگر تنها مسئله های بهینه سازی ناپیوسته را حل می کنند.

نکته ۲: اغلب روش های حل مدرن شامل روش های تکاملی (Evolutionary) و فراکاوشی (Meta-Heuristic) قادر به حل هر دو نوع مسئله هستند.

نکته ۳: تبدیل مسائل پیوسته به ناپیوسته (به دلیل محدود شدن امکان انتخاب متغییرهای تصمیم از بین گزینه های ناپیوسته) و ناپیوسته به پیوسته (عدم انطباق دقیق جواب بهینه بدست آمده در فضای تصمیم پیوسته با گزینه های تصمیم ناپیوسته تعریف شده توسط مسئله اولیه)، دقت حل مسائل را کاهش می دهند.

خصوصیات مسائل بهینه سازی

فضای تصمیم ناپیوسته حاصل از متغیرهای تصمیم ناپیوسته



خصوصیات مسائل بهینه سازی

مسائل محدب و غیر محدب (مقعر)

محدب (Convex) یا غیر محدب بودن یک مسئله بهینه سازی با توجه به شکل رابطه ریاضی تابع هدف و قیدهای آن مشخص می شود. مفهوم های تحدب و تقعر (Concave) توابع در وجود جواب برای مسئله بهینه سازی و نوع آن اهمیت زیادی دارند. یک تابع تک متغیره مانند $f(x)$ در یک ناحیه معین، محدب خواهد بود، هرگاه برای هر x' و $x^{"}$ که $x^{"} \neq x'$ است، رابطه زیر برقرار باشد:

تابع محدب (Convex function)

$$f\left[\theta x' + (1-\theta)x^{"}\right] \leq \theta f(x') + (1-\theta)\, f\left(x^{"}\right) \quad , \quad 0 \leq \theta \leq 1$$

تابع کاملاً محدب (Strictly Convex function)

$$f\left[\theta x' + (1-\theta)x^{"}\right] < \theta f(x') + (1-\theta)\, f\left(x^{"}\right) \quad , \quad 0 \leq \theta \leq 1$$

تابع مقعر (Concave function)

$$f\left[\theta x' + (1-\theta)x^{"}\right] \geq \theta f(x') + (1-\theta)\, f\left(x^{"}\right) \quad , \quad 0 \leq \theta \leq 1$$

تابع کاملاً مقعر (Strictly Concave function)

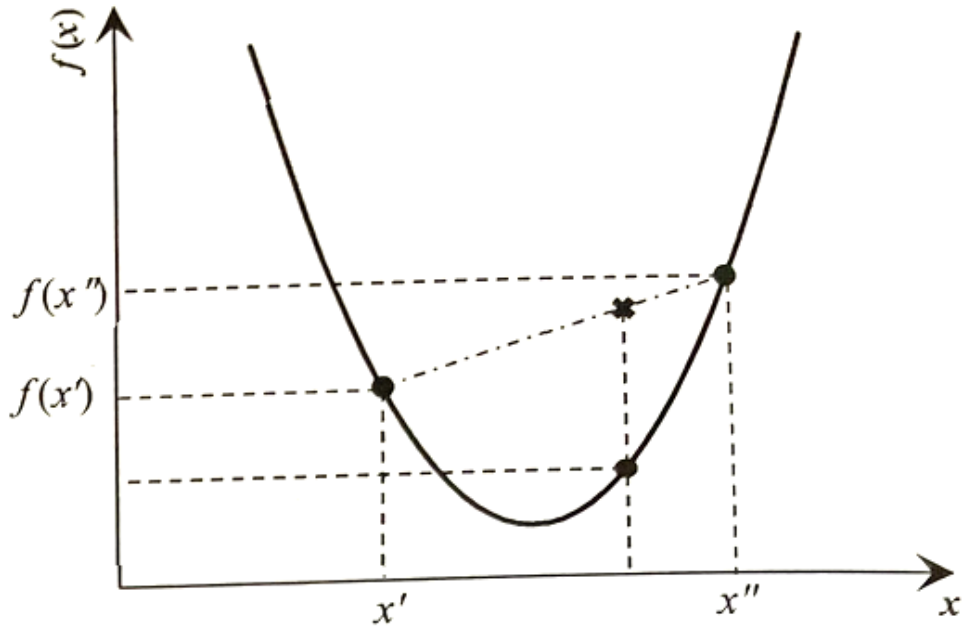
$$f\left[\theta x' + (1-\theta)x^{"}\right] > \theta f(x') + (1-\theta)\, f\left(x^{"}\right) \quad , \quad 0 \leq \theta \leq 1$$

نکته: چنانچه تابعی مقعر باشد، نقطه بهینه، بیشینه و اگر محدب باشد نقطه بهینه، کمینه خواهد بود.

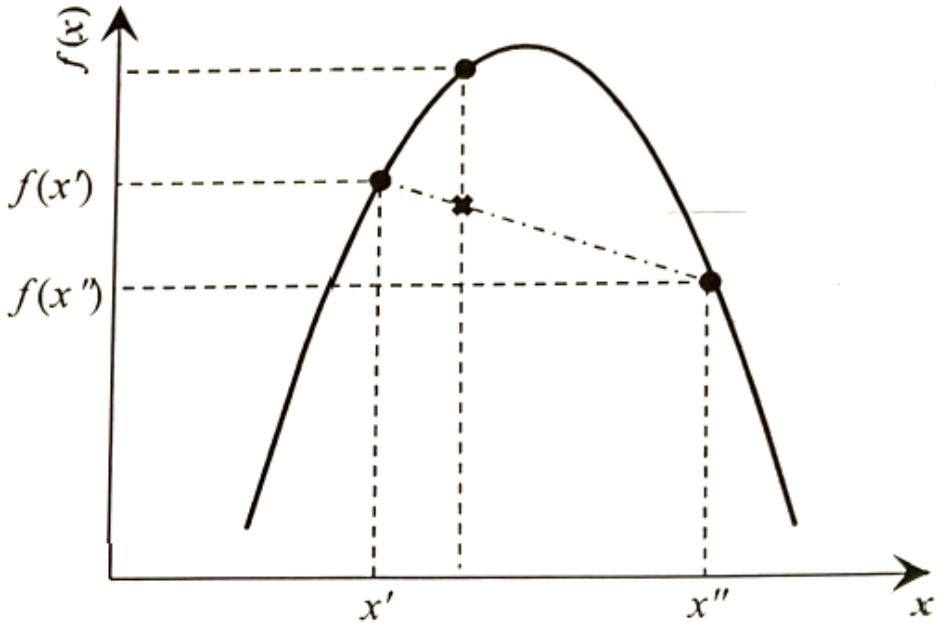
خصوصیات مسائل بهینه سازی

اگر دو نقطه $(x', f(x'))$ و $(x'', f(x''))$ روی نمودار باشند، در این صورت $\theta f(x') + (1-\theta) f(x'')$ با $\theta x' + (1-\theta)x'', \theta f(x') + (1-\theta) f(x'')$ فرض $0 \leq \theta \leq 1$ نشان دهنده کلیه نقطه هایی است که روی پاره خط رابط این دو نقطه قرار می گیرند. در صورتی که کل این پاره خط در بالا و یا بر روی منحنی واقع شود، به عبارت دیگر اگر خمیدگی $f(x)$ در همه جا رو به سوی بالا باشد، تابع محدب است در غیر اینصورت تابع مقعر می باشد. این مفهوم برای توابعی که بیش از یک متغیر دارند، نیز قابل تعمیم است.

نکته: توابع خطی هم محدب هستند و هم مقعر اما نه کاملاً محدب و نه کاملاً مقعر می باشند.



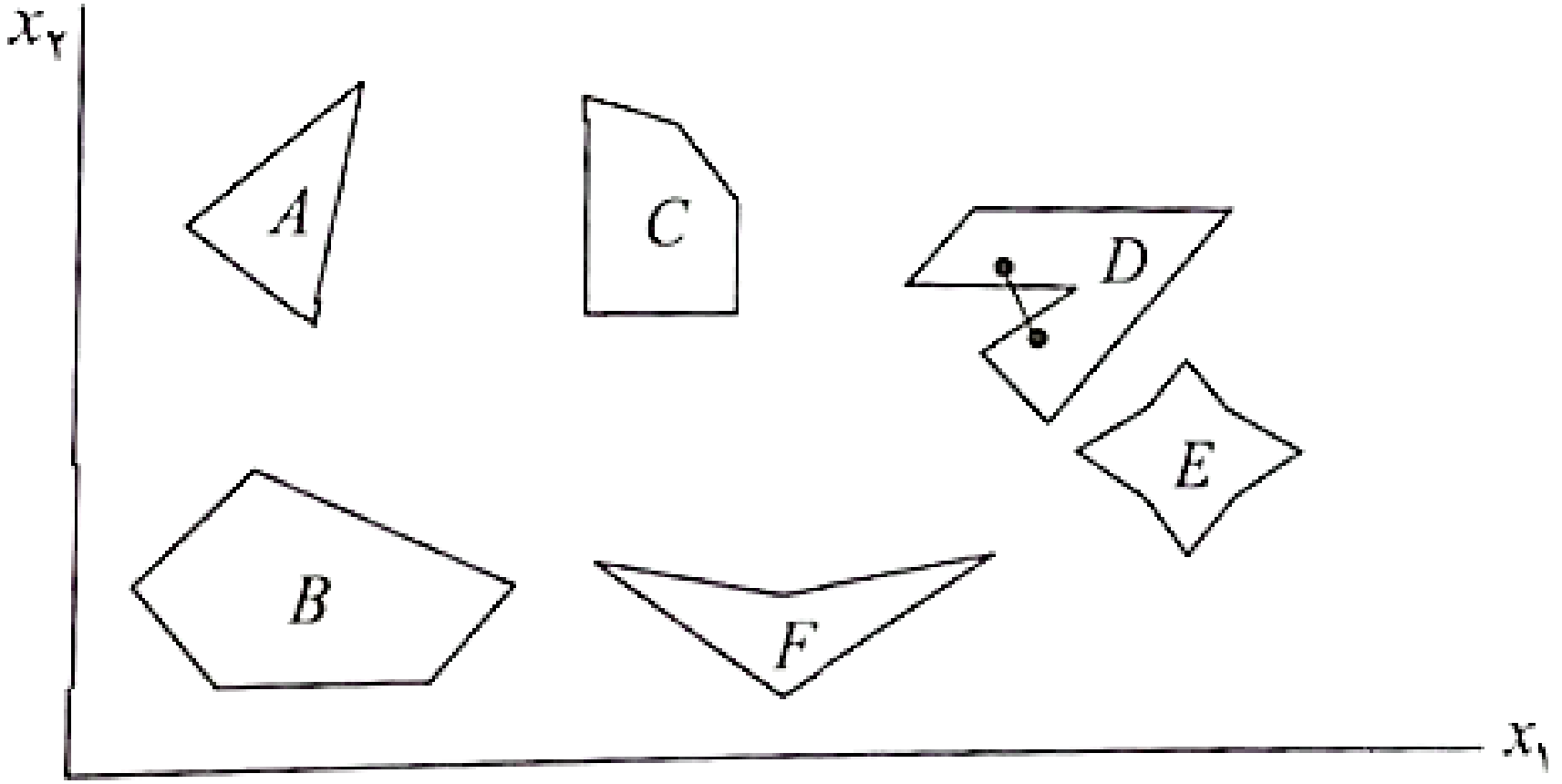
(الف) تابع محدب



(ب) تابع مقعر

خصوصیات مسائل بهینه سازی

به عبارت ساده تر، فضاهای تصمیم محدب، فضاهایی هستند که هرگاه دو نقطه از آن ها به دلخواه انتخاب و با یک خط راست به هم وصل شوند، خط واصل درون فضای تصمیم قرار گیرد. در شکل زیر، فضاهای تصمیم A، B و C، محدب و فضاهای تصمیم F، E و D مقعر می باشند.



خصوصیات مسائل بهینه سازی

برای توابع چند متغییره، اگر دو نقطه $[(x_1',x_2',x_3',\ \dots,x_n'), f(x_1',x_2',x_3',\ \dots,x_n')]$ و $[(x_1'',x_2'',x_3'',\ \dots,x_n''),\ f(x_1'',x_2'',x_3'',\ \dots,x_n'')]$ روی نمودار باشند، در این صورت پاره خط رابط بین این دو نقطه مجموعه نقاط زیر است $(0 \le \theta \le 1)$:

$$\begin{bmatrix} \theta x_1' + (1-\theta)x_1'' , \theta x_2' + (1-\theta)x_2'', \theta x_3' + (1-\theta)x_3'', & \dots, \theta x_n' + (1-\theta)x_n'' \\ \theta f(x_1') + (1-\theta) f(x_1''), \theta f(x_2') + (1-\theta) f(x_2''), \theta f(x_3') + (1-\theta) f(x_3''), & \dots, \theta f(x_n') + (1-\theta) f(x_n'') \end{bmatrix}$$

بر این اساس، تابع $f(x)$ در صورتی محدب است که پاره خط رابط بین هر زوج دلخواهی از نقاطه روی نمودار $f(x)$ بالا و یا بر روی نمودار واقع شود. چنانچه تمام نقاط این پاره خط به استثنای دو انتهای آن در بالای نمودار قرار گیرند، در این صورت تابع همواره محدب است. توابع مقعر و همواره مقعر نیز به همین ترتیب تعریف می شوند تنها با این تفاوت که کلمه پایین با بالا جایگزین می گردد.

اگر دو نقطه از یک تابع سه متغییره به صورت مقابل در نظر گرفته شود:
$(x_1', x_2', x_3',) = (3,5,8)\ , (x_1'', x_2'', x_3'') = (1.5,9,6)$

پاره خط رابط بین این دو نقطه مجموعه نقطه های مقابل است:

$$[3\theta + 1.5(1-\theta)\ , 5\theta + 9(1-\theta)\ , 8\theta + 6(1-\theta)]\ , 0 \le \theta \le 1$$

خصوصیات مسائل بهینه سازی

جهت تشخیص محدب و یا مقعر بودن توابع چند متغییره لازم است از مفاهیم بردار گرادیان (Gradient vector) و ماتریس هشین (Hessian Matrix) آن استفاده شود.

$$\nabla f(x_1, x_2, x_3, \dots, x_n) = \left(\frac{\partial f}{\partial x_1}, \frac{\partial f}{\partial x_2}, \frac{\partial f}{\partial x_3}, \dots, \frac{\partial f}{\partial x_n}\right)^T$$

$$H_f(x_1, x_2, x_3, \dots, x_n) = \left(\frac{\partial^2 f}{\partial x_i \partial x_j}\right) \quad , \qquad \forall\, i, j = 1,2,3, \dots, n$$

تعاریف معینی و نامعینی ماتریس ها

وضعیت ماتریس	شرایط
معین مثبت (Positive definite)	$X^T.A.X > 0 \quad , \quad \forall x \neq 0$
نیمه معین مثبت (Positive semi-definite)	$X^T.A.X \geq 0 \quad , \quad \forall x$
معین منفی (Negative definite)	$X^T.A.X < 0 \quad , \quad \forall x \neq 0$
نیمه معین منفی (Negative semi-definite)	$X^T.A.X \leq 0 \quad , \quad \forall x$
غیرمعین (Indefinite)	$X^T.A.X < 0 \quad or \quad X^T.A.X > 0$

اگر در این جدول بجای A از H_f استفاده شود، می تواند جهت تشخیص محدب، مقعر، کاملاً محدب و کاملاً مقعر بودن مورد استفاده قرار گیرد.

خصوصیات مسائل بهینه سازی

رابطه بین یک تابع و ماتریس هشین آن

وضعیت تابع	ماتریس هشین
محدب	نیمه معین مثبت
کاملاً محدب	معین مثبت
مقعر	نیمه معین منفی
کاملاً مقعر	معین منفی
نه محدب و نه مقعر	غیرمعین

مثال) بررسی نمائید که تابع هدف زیر محدب است یا خیر؟

$$f(x) = 10(x_1 - 2)^2 + 4x_1x_2^2$$

$$\nabla f(x_1, x_2) = \begin{bmatrix} 20(x_1 - 2) + 4x_2^2 \\ 8x_1x_2 \end{bmatrix}$$

$$H_f(x_1, x_2) = \left[\frac{\partial^2 f}{\partial x_i \partial x_j}\right] = \begin{bmatrix} 20 & 8x_2 \\ 8x_2 & 8x_1 \end{bmatrix}, \forall\, i, j = 1,2$$

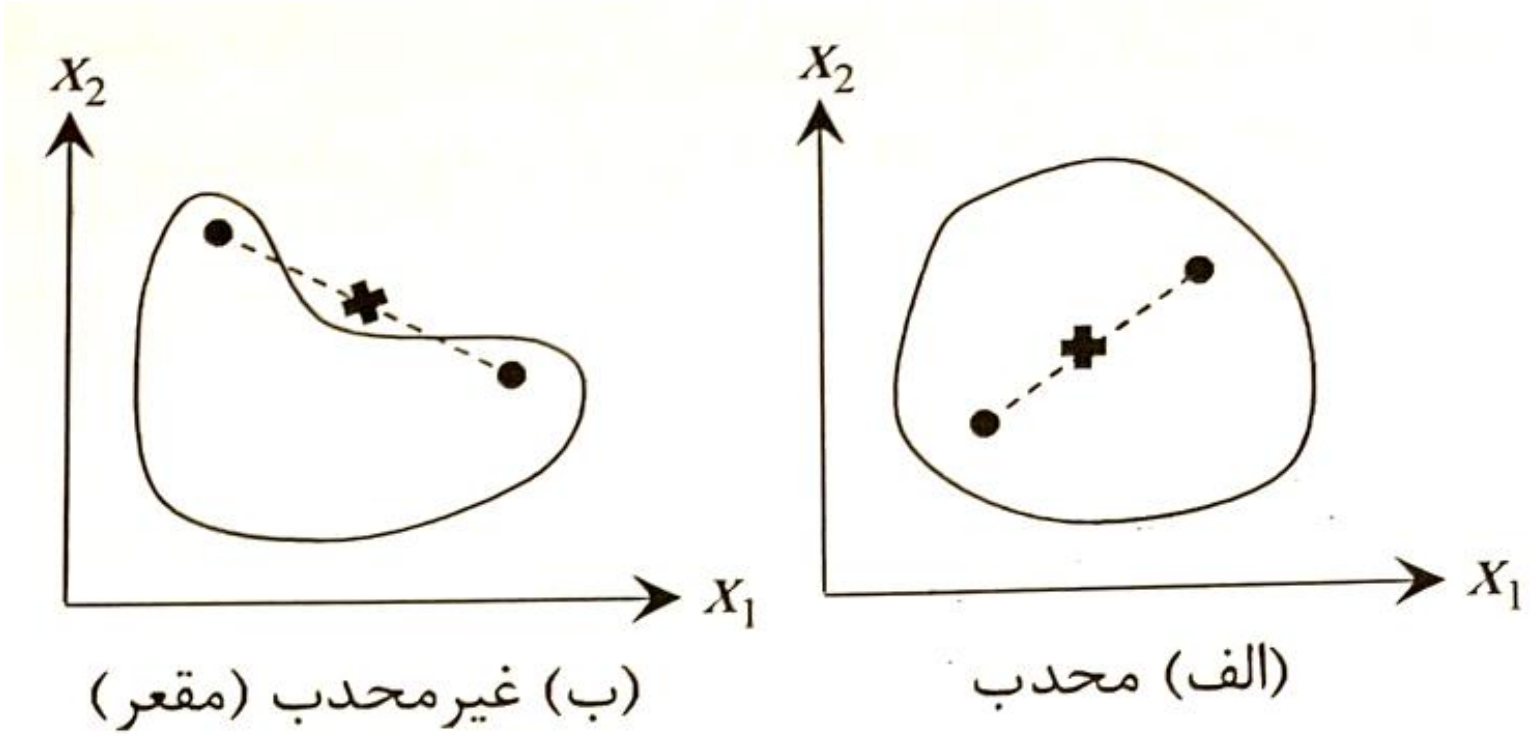
$$X^T . H_f . X = [x_1 \quad x_2] . \begin{bmatrix} 20 & 8x_2 \\ 8x_2 & 8x_1 \end{bmatrix} . \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \end{bmatrix} = 20x_1^2 + 8x_2^3 + 16x_1x_2^2$$

با توجه به اینکه تابع نهایی بدست آمده به ازای مقادیر مثبت و منفی متغییرهای تصمیم تابع هدف می تواند مثبت و یا منفی شود، لذا ماتریس هشین آن غیرمعین بوده و این تابع نه محدب است و نه مقعر.

خصوصیات مسائل بهینه سازی

فضای تصمیم مسئله های بهینه سازی نیز می توانند به دو دسته محدب و غیر محدب (مقعر) تقسیم بندی شوند. مطابق شکل زیر، فضای تصمیم در صورتی محدب است که تمامی پاره خط (برای مسائل دو متغییره) (اگر سه متغیر باشد، تمامی صفحه و اگر بیش از سه متغیر، تمامی رویه) ایجاد شده در نتیجه اتصال هر دو نقطه (جواب) بر روی این فضا، در داخل فضای تصمیم قرار گرفته باشد.

در صورتی که دست کم نقطه ای در حد فاصل بین دو نقطه (جواب) بر روی فضای تصمیم در خارج از فضای تصمیم قرار گیرد، به آن فضای تصمیم غیر محدب (مقعر) گویند.



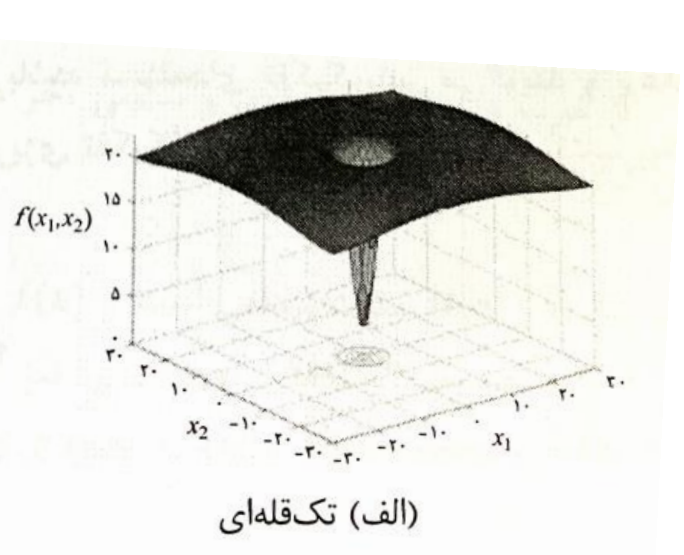
(ب) غیرمحدب (مقعر)

(الف) محدب

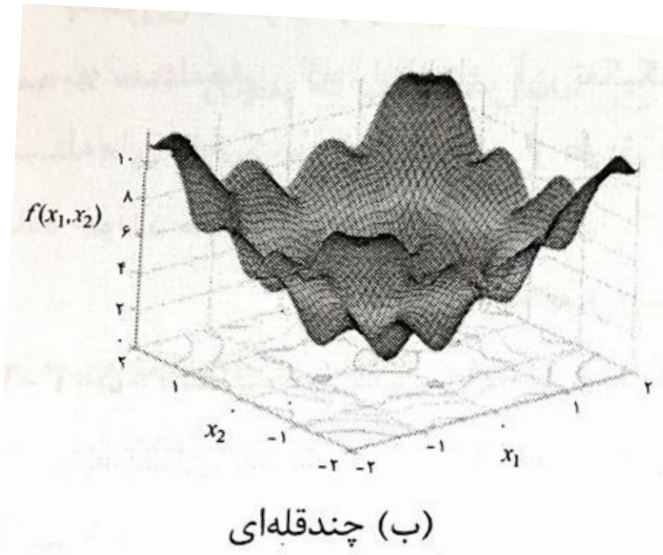
خصوصیات مسائل بهینه سازی

مسائل تک قله ای (Single-Modal) و چند قله ای (Multi-Modal)

رویه فضای تصمیم مسائل بهینه سازی می تواند تک قله ای (محدب، مقعر، هم محدب و هم مقعر) و یا چندقله ای (نه محدب و نه مقعر) باشد. اگر تابع هدف مسئله، تک و یا دو متغیره باشد، به سادگی با رسم نمودار دو بعدی تابع هدف برحسب متغیر تصمیم می توان تک قله ای و یا چندقله ای بودن آن را تشخیص داد. حل مسائل چندقله ای با استفاده از روش های بهینه سازی به طور عمومی **سخت تر** از حل مسئله های تک قله ای است. علت این امر گیرافتادن روش بهینه سازی در بهینه های موضعی رویه تابع هدف است. در این شرایط روش بهینه سازی ممکن است بهینه موضعی بدست آمده را به عنوان جواب بهینه معرفی کند، در حالی که ممکن است بهینه مطلق مسئله در یکی از نقطه های دیده نشده باشد که از نظر مطلوبیت بسیار مناسب تر از بهینه های موضعی است. این امر هم در روش های مبتنی بر گرادیان (شیب تابع هدف) و هم در روش های مبتنی بر سعی و خطا و ارزیابی مکرر تابع هدف (همانند روش های مدرن) ممکن است رخ دهد.



(الف) تک‌قله‌ای



(ب) چندقله‌ای

خصوصیات متغیرها و نمایه های مدل های بهینه سازی

در مدل های بهینه سازی، داده های ورودی می توانند حالت های زیر را داشته باشند:

- پیوسته
- ناپیوسته (عدد صحیح، گسسته یا دودویی)

مرتبط با متغیرهای تصمیم می باشند.

- قطعی (Deterministic)
- تصادفی (Random) یا احتمالی (Probabilistic)
- استوکستیکی (Stochastic)
- صریح (Crisp)
- فازی (Fuzzy)

مرتبط با ضرایب ثابت تابع هدف، ضرایب سمت چپ یا مقدارهای سمت راست قیدها و نمایه های موجود در مدل های شبیه سازی

خصوصیات متغیرها و نمایه های مدل های بهینه سازی

نمایه های قطعی

این دسته از نمایه ها مربوط به داده هایی هستند که مقدار آن ها با قطعیت کامل قابل تعیین و یا پیش بینی است.

به عنوان نمونه در مسئله طراحی شبکه توزیع آب شهری، طول لوله های شبکه و یا حجم مخزن تغذیه با قطعیت و دقت بالا قابل بیان است. اگر طول یکی از لوله ها ۱۰۰ متر است، استفاده از این عدد در مدل بهینه سازی با قطعیت کامل ممکن بوده و با هیچ احتمالی مقدار طول لوله برابر ۱۰۱ متر نخواهد شد.

در مثال بهره برداری از مخزن، ارتفاع سد، ظرفیت تخلیه خروجی ها و ظرفیت سرریز از جمله نمایه های قطعی مسئله هستند که تعیین مقدار آنها با قطعیت کامل صورت می گیرد. مواجه شدن با نمایه های قطعی در مسائل بهینه سازی، ساده و بدون حاشیه است. این امر به این دلیل است که در پیش فرض در نظر گرفته شده در روند حل مسئله تغییری رخ نخواهد داد اما در صورتی که نمایه مورد نظر قطعی نباشد، شرایط تغییر کرده و نحوه برخورد نیز باید تغییر کند.

خصوصیات متغیرها و نمایه های مدل های بهینه سازی

نمایه های تصادفی یا احتمالی

- نمایه های تصادفی یا احتمالی نمایه هایی هستند که وقوع آنها دارای یک توزیع احتمالاتی است. در حقیقت تعیین مقدار یا تعداد این نمایه ها به طور دقیق ممکن نبوده و برای تعیین آنها باید از توزیع های احتمالاتی بهره گرفت.
- امکان تعیین یا پیش بینی مقدار یا تعداد دقیق وقوع یا عدم وقوع آن ها وجود ندارد. در حقیقت تعیین مقدار یا تعداد این نمایه ها احتمالی بوده و تعیین دقیق آن ها با توجه به داده های موجود ممکن نیست.
- این نمایه ها می توانند در پدیده های طبیعی و غیر طبیعی (مصنوعی/انسان ساخت) همچون خصوصیت های سازه های ساخت دست بشر وجود داشته باشند.
- به عنوان نمونه تعیین ضریب زبری لوله برای یک فرد عادی کاری ناممکن است و امکان تعیین مقدار دقیق آن برای او وجود ندارد لذا می توان گفت که ضریب زبری بین ۱۲۰ تا ۱۵۰ خواهد بود، ولی احتمال بین ۱۲۵ تا ۱۳۵ بیشتر است. این نوع نگاه و برخورد با این پدیده، یک برخورد احتمالی است و در چنین شرایطی نمایه ضریب زبری یک نمایه تصادفی یا احتمالی است و برای حل آن ها باید از روش های مناسب بهینه سازی استفاده کرد. در این خصوص می توان به نمایه های ضرایب هیدرودینامیکی آبخوان، ضرایب مدل های نفوذ و ... نیز اشاره نمود.

خصوصیات متغیرها و نمایه های مدل های بهینه سازی

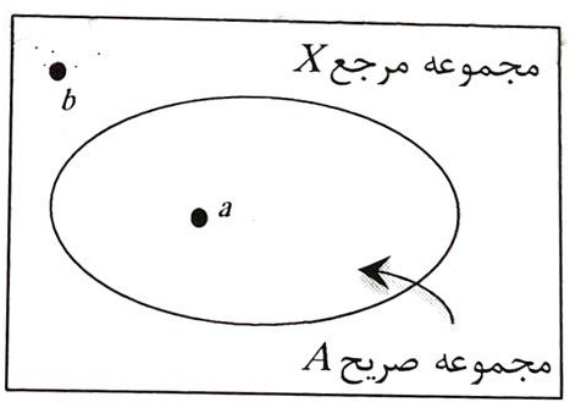
نمایه های استوکستیکی

- در صورتی که با داشتن یک مجموعه آمار تاریخی و با کمک رابطه های ریاضی و علم آمار بتوان احتمال وقوع یک رخداد را با درصدی از اطمینان به صورت قطعی پیش بینی کرد، آن نمایه را استوکستیکی می نامند. استوکستیک در حقیقت ترکیبی از قطعیت و احتمال است.
- بخش ریاضی پیش بینی فوق، قطعی و بخش دیگر آن احتمالی است. این نمایه ها به طور عمومی در پدیده هایی که منبع طبیعی (دما، بارش و رواناب) دارند بیشتر وجود دارند. به عنوان مثال در مورد حجم رواناب ماهانه، با استفاده از روش های پیش بینی ریاضی و آماری و با استفاده از آمار تاریخی رواناب، می توان حجم رواناب ماه آینده را با درصدی از اطمینان پیش بینی کرد.
- اکثر نمایه های هیدرولوژیکی ماهیت استوکستیکی دارند و پیش بینی و برآورد آن ها با استفاده از علم آمار تنها با درصدی از اطمینان ممکن می باشد.

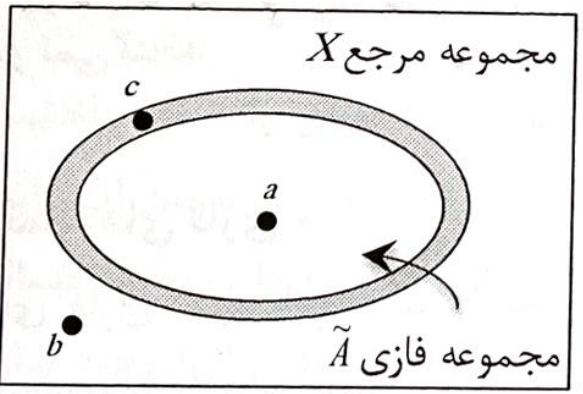
خصوصیات متغیرها و نمایه های مدل های بهینه سازی

نمایه های صریح و فازی

- نمایه های فازی، نمایه هایی هستند که یا مقدار صریح و دقیق آنها مشخص نبوده و یا میزان مطلوبیت (عضویت) یا عدم مطلوبیت (عدم عضویت) این نمایه در دامنه خاصی از مقدارها می تواند عددهای متفاوتی را به خود اختصاص دهد.
- هر یک از نمایه های مدل های بهینه سازی به طور عام می توانند فازی باشند. بنابراین هر یک از مقدارهای ثابت موجود در تابع هدف، سمت چپ یا راست قیدها می توانند فازی باشند.
- در استفاده از منطق فازی در مسائل بهینه سازی یک تابع فازی تعریف می شود که مطلوبیت (عضویت) هر نمایه را بیان می کند.
- به طور کلی، در مدل های فازی مسئله از حالت سخت، خشک و صلب خارج شده و تصمیم گیری انعطاف پذیرتر می شود.



(الف) صریح

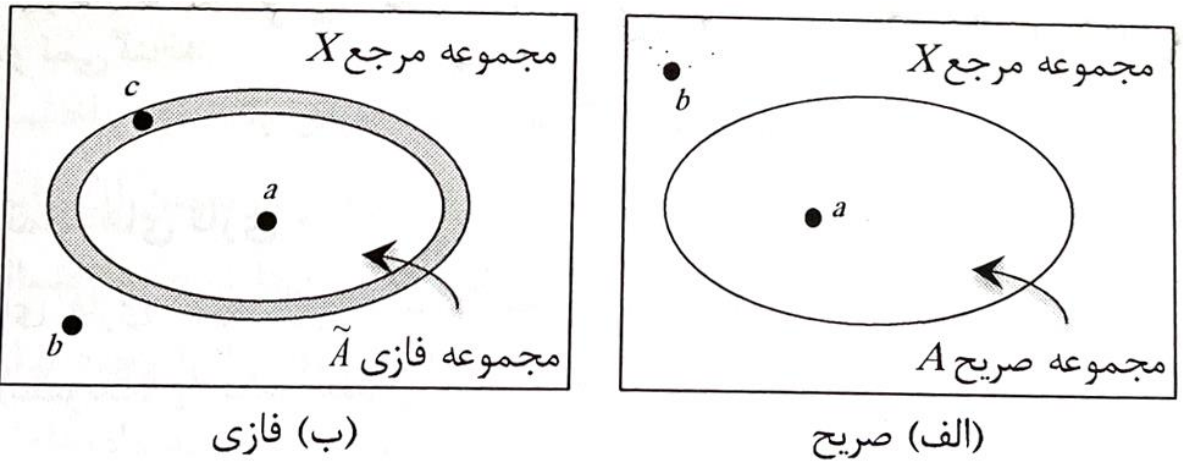


(ب) فازی

خصوصیات متغیرها و نمایه های مدل های بهینه سازی

مجموعه های صریح و فازی زیر مجموعه هایی از یک مجموعه مرجع میباشند.

- فرض کنید X مجموعه مرجع و A یک زیر مجموعه صریح از X باشد. مجموعه صریح A دارای مرز دقیق، صریح و معین است. بنابراین هر عضو از مجموعه مرجع X یا به مجموعه صریح A تعلق دارد یا ندارد. لذا می توان نتیجه گرفت که درجه عضویت عضوهای a و b به مجموعه صریح A به ترتیب برابر با یک و صفر است.
- مرز مجموعه های فازی به صورت صریح و دقیق نبوده بلکه به صورت یک دامنه است. عضو a به طور کامل به مجموعه فازی A تعلق دارد و عضو b در اصل به این مجموعه تعلق ندارد. لذا درجه عضویت های عضوهای a و b به مجموعه فازی A به ترتیب برابر با یک و صفر می باشند اما عضو c بر روی مرز مجموعه A واقع بوده، بنابراین درجه عضویت آن به مجموعه فازی A نه می تواند یک باشد و نه صفر، بلکه عددی بین صفر و یک است.
- در منطق فازی مقدار درجه عضویت اعضاء با استفاده یک از رابطه ریاضی به نام تابع عضویت (Membership function) مشخص می شود.
- برد توابع عضویت صریح، مجموعه دو عضوی یک و صفر $(0,1)$ بوده در حالی که برد تابع های عضویت فازی $[0-1]$ است.



(الف) صریح (ب) فازی

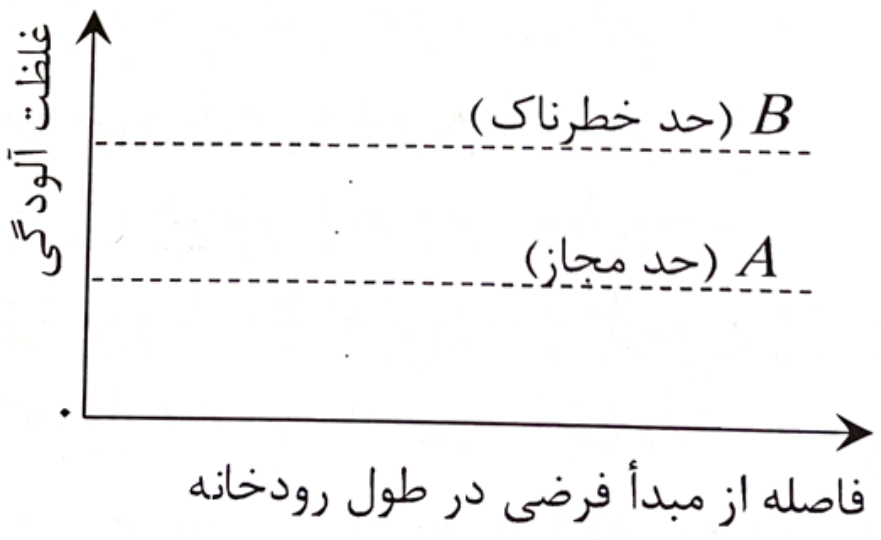
خصوصیات متغیرها و نمایه های مدل های بهینه سازی

مثال در خصوص استفاده از منطق فازی در مسائل بهینه سازی رودخانه

در رودخانه ای، هدف ساخت تصفیه خانه در نقاط مختلف آن به گونه ای که این تصفیه خانه ها با کمترین هزینه بتوانند بار آلودگی را در طول رودخانه در حد مجاز کنترل کنند.

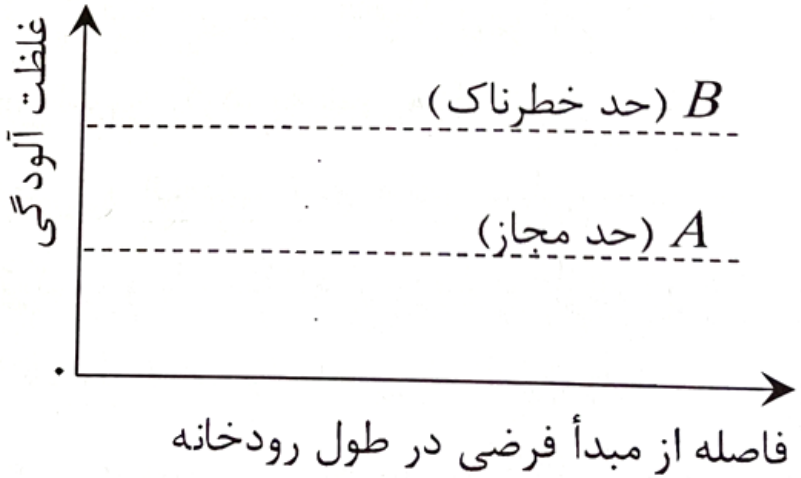
جواب بهینه زمانی حاصل می شود که بار آلودگی در طول رودخانه به اندازه مجاز بوده و در عین حال هزینه نیز کمینه شود. حد مجاز آلاینده در طول رودخانه را به صورت یک **عدد ثابت** تعریف می شود. اگر قید به صورت یک عدد ثابت حد مجاز غلظت آلاینده در نظر گرفته شود، تجاوز میزان آلاینده از این حد به معنای عدم موفقیت در کنترل آلودگی است و سبب حذف مطلوبیت می شود.

مطابق شکل، خطوط A و B به ترتیب نشان دهنده حدود مجاز و خطرناک آلودگی در رودخانه هستند. اگر غلظت آلودگی در رودخانه خط A کنترل شود وضعیت کیفی رودخانه بسیار مطلوب بوده ولی هزینه تصفیه افزایش می یابد ضمن این که در غلظت های بالاتر از خط B نیز با وجود هزینه کمتر تصفیه، امکان استفاده و برداشت از آب در رودخانه وجود نخواهد داشت.



خصوصیات متغیرها و نمایه های مدل های بهینه سازی

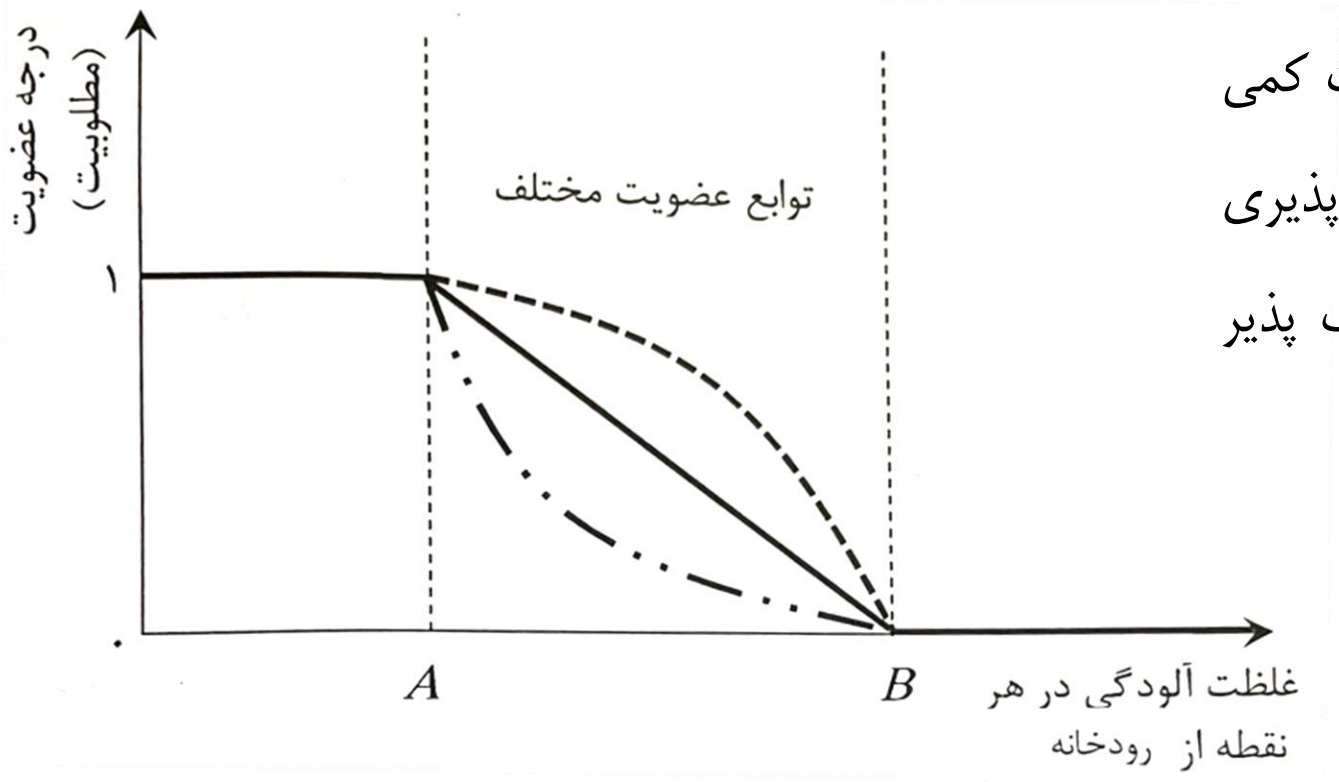
- همچنین می توان مقدار کمی تخطی را پذیرفت. به دلیل ملاحظات اقتصادی می توان بار آلودگی رودخانه را در بین دو مرز A و B کنترل نمود.
- به این ترتیب اگر A به عنوان مرز انتخاب شود بار آلودگی رودخانه کمتر (بهتر) و هزینه تصفیه بیشتر (بدتر) می شود و در صورتی که B به عنوان مرز انتخاب شود بار آلودگی بیشتر (بدتر) ولی هزینه تصفیه کمتر (بهتر) می شود.
- ارزش جواب هایی که در هر حالت تعیین می شوند، یکسان نبوده و بنابراین برای سنجش میزان مطلوبیت جواب های موجود، بهتر است ناحیه بین این دو مرز وزن دهی (رتبه بندی) شود. لذا می توان از منطق فازی و تابع عضویت استفاده کرد. بنابراین به بهترین و بدترین جواب از نظر تابع هدف مسئله به ترتیب درجه عضویت یا مطلوبیت ایده آل و غیر ایده آل نسبت داده شده و ناحیه بین این دو مقدار بر اساس مطلوبیت جواب های موجود، با عددهای به ترتیب بین یک تا صفر وزن دهی (مطلوبیت گذاری) می شوند.



خصوصیات متغیرها و نمایه های مدل های بهینه سازی

مطابق شکل زیر، برای غلظت آلودگی کمتر از حد A و بیشتر از حد B به ترتیب درجه عضویت یک و صفر در نظر گرفته می شود. فاصله بین این حدود را نیز می توان با رابطه های خطی یا منحنی های محدب و مقعر تعیین کرد. به طور نمونه در این مثال انتخاب یک تابع محدب نشان دهنده برتری رویکرد زیست محیطی و انتخاب تابع مقعر نشان دهنده برتری رویکرد اقتصادی در انجام این پروژه خواهد بود.

به این ترتیب و با استفاده از رویکرد فازی در حل این مثال می توان برخی نمایه های کیفی که بیان کمی آنها دشوار است را به صورت کمی وارد مدل بهینه سازی کرد و در عین حال با برقراری انعطاف پذیری لازم در برنامه ریزی به سمت ارائه راهکارهای عملی و انعطاف پذیر حرکت نمود.



دسته بندی روش های بهینه سازی

با توجه به فضای تصمیم، ویژگی ها و شکل تابع هدف، خصوصیات مربوط به متغیرها و نمایه های مدل، روش های بهینه سازی مختلفی تاکنون ابداع و ارائه شده اند. به صورت کلی روش های بهینه سازی را می توان به صورت زیر دسته بندی نمود:

- روش های خطی/غیر خطی
- روش های قطعی/ تصادفی (احتمالی)/ استوکستیک
- روش های پیوسته/ناپیوسته
- روش های صریح/فازی
- روش های کلاسیک (Classic methods) / مدرن (Modern methods)

روش های خطی/غیر خطی

در مدل های خطی، فضای تصمیم به صورت چند ضلعی هایی هستند که با قیدها (خطوط مستقیم) محصور شده اند و تابع هدف به صورت یک خط مستقیم در درون آن حرکت می کند. در حالی که در مدل های غیر خطی، فضای تصمیم به شکل یک فضای محصور با قیدها یا خط های منحنی و یا فضای محصور خطی با یک تابع هدف غیرخطی و یا ترکیبی از هر دو است.

دسته بندی روش های بهینه سازی

با توجه به سادگی بیشتر فضای تصمیم موجه در مدل های خطی، امکان وجود و توسعه روش های مختلف حل برای این گونه مدل ها وجود دارد که از این جمله می توان به روش های ترسیمی و روش سیمپلکس (Simplex) اشاره کرد. به طور معمول نقاط بهینه در این گونه مدل ها همیشه در نقطه های تقاطع خط های مرزی موجود با یکدیگر قرار گرفته اند، لذا حل اینگونه مدل ها به طور عمومی بر پایه حل دستگاه معادلات است.

در مدل های غیرخطی، امکان وجود جواب بهینه در هر نقطه مرزی (نه به طور حتم بر روی نقطه های تقاطع منحنی های مرزی) وجود دارد که این موضوع نیاز به محاسبه مشتق های منحنی های غیر خطی مرزی را نمایان می سازد. از آنجا که در مدل های پیچیده امکان محاسبه مشتق ها به روش تحلیلی وجود ندارد بنابراین در این راستا از روش های محاسبات عددی جهت محاسبه مشتق ها و نقطه های بهینه استفاده می شود. به همین جهت به این دسته از روش ها روش های بر پایه گرادیان (شیب) (Gradient Based Methods) نیز اتلاق می شود.

دسته بندی روش های بهینه سازی

روش های قطعی/ تصادفی (احتمالی)/ استوکستیک

- برای مواجه با مسائل قطعی/ تصادفی (احتمالی)/ استوکستیک به ترتیب استفاده از روش های بهینه سازی قطعی، تصادفی و استوکستیک مناسب است.
- بکار گرفتن یک روش بهینه سازی قطعی در یک مسئله تصادفی سبب نادیده گرفتن ذات احتمالی پدیده های مسئله و سبب دست نیافتن به جواب منطقی و کاربردی برای مسئله خواهد شد.
- استفاده از یک روش بهینه سازی تصادفی (احتمالی) یا استوکستیک در یک مسئله قطعی، غیر عاقلانه خواهد بود و پیچیدگی های غیرلازم و غیرمنطقی را به حل مسئله می افزاید.
- نمونه هایی از مدل های برنامه ریزی تصادفی (احتمالی) و استوکستیک: برنامه ریزی خطی استوکستیک (Stochastic Linear Programming) و یا برنامه ریزی پویای استوکستیک (Stochastic Dynamic Programming)

دسته بندی روش های بهینه سازی

روش های پیوسته/ناپیوسته

- متغیرهای تصمیم، فضای تصمیم و به تبع آن مسئله های بهینه سازی می توانند پیوسته و یا ناپیوسته باشند.
- حل یک مسئله ناپیوسته با استفاده از یک روش بهینه سازی پیوسته منجربه ارائه جواب های غیر کاربردی خواهد شد. به عنوان نمونه در صورتی که مسئله طراحی قطر لوله های شبکه توزیع آب شهری با استفاده از یک روش بهینه سازی پیوسته حل شود، جواب نهایی، قطرهایی را ارائه خواهد داد که در بازار موجود نمی باشند. در مقابل حل یک مسئله پیوسته توسط یک روش بهینه سازی ناپیوسته سبب به وجود آمدن تقریب و ساده سازی در مسئله خواهد شد که میزان و سطح این ساده سازی ممکن است جواب بهینه را تحت تأثیر قرار دهد، همانند تعیین مقدار بهینه تخصیص آب از یک مخزن که جواب های ناپیوسته می تواند منجر به دور شدن از مقادیر بهینه شود.
- از جمله روش های بهینه سازی پیوسته می توان به برنامه ریزی خطی (Linear Programming) و برنامه ریزی غیرخطی (Non-Linear Programming) و روش های ناپیوسته می توان به روش برنامه ریزی پویا (Dynamic Programming) نام برد. روش های مدرن بهینه سازی نیز قابلیت استفاده در هر دو روش پیوسته و ناپیوسته را دارند.

دسته بندی روش های بهینه سازی

روش های صریح/ فازی

- در صورتی که رویکرد فازی در یک مدل بهینه سازی به کار نرفته باشد، به آن مدل بهینه سازی صریح گویند. در یک مدل صریح، مطلوبیت متغیرها حالت یک و صفر داشته و انعطاف پذیری رویکرد فازی در آن وجود ندارد.
- در هر مسئله بهینه سازی، بنا به خصوصیت ها و ویژگی های مسئله تصمیم گیری در مورد نگاه صریح و یا فازی انجام می شود.
- تمامی روش های بهینه سازی را می توان با رویکرد صریح یا فازی تنظیم و در حل مسئله ها از آن ها استفاده کرد.

روش های کلاسیک/ مدرن

- روش های کلاسیک بهینه سازی اغلب بر پایه مفهوم های ریاضی بوده و در آن ها از روش های حل ریاضی استفاده می شود. این روش ها برای حل مسئله از حل مستقیم دستگاه معادله ها و یا از روش های محاسبه های عددی استفاده کرده و به جواب های بهینه مطلق و گاهی موضعی دسترسی پیدا می کنند (همانند برنامه ریزی خطی، برنامه ریزی غیرخطی و برنامه ریزی پویا). افزایش جزئیات مسئله که منجربه پیچیده تر شدن مدل ریاضی بهینه سازی آن می شود به شدت بر عملکرد این روش ها تأثیر گذار است به طوری که گاهی حل مسئله های مهندسی با این روش ها غیر ممکن می شود.

دسته بندی روش های بهینه سازی

- در دهه های اخیر استفاده از روش های بهینه سازی مدرن نظیر الگوریتم های تکاملی و فراکاوشی جهت پوشش ضعف های موجود در روش های کلاسیک فراگیر شده است. این روش ها با الگو گرفتن از فرآیندهای طبیعی موجود در طبیعت و موجودهای زنده به جستجوی فضای تصمیم می پردازند.
- اساس روش های مدرن، انجام تعداد زیاد سعی و خطا است که در طی آن با استفاده از الگوریتم سعی و خطا به سمت جواب بهینه هدایت می شوند.
- اگرچه روش های مدرن در مسئله های مشابه دقت و اطمینان روش های کلاسیک را ندارند ولی فرار از بهینه های موضعی، سادگی کاربرد، عدم نیاز به محاسبه مشتق ها و توانایی حل و ارائه جواب برای مسئله های پیچیده مهندسی را می توان از مهمترین برتری های آنها برشمرد.
- در حقیقت این روش ها به جای دستیابی به بهینه های مطلق به جواب های نزدیک بهینه می رسند که از نظر مهندسی قابل توجه است اما در مقابل در رویارویی با مسئله های واقعی که دارای مدل های بهینه سازی پیچیده (تعداد زیاد قید، توابع غیر خطی و وجود رابطه های شبیه سازی پیچیده که به طور عمومی نیازمند حل معادله های دیفرانسیل است) بسیار کارآمدتر هستند.
- از جمله روش های مدرن عبارتند از: الگوریتم نورد شبیه سازی شده (Simulated Annealing)، الگوریتم ژنتیک (Genetic Algorithm)، الگوریتم بهینه سازی جامعه مورچگان (Ant Colony Optimization)، الگوریتم بهینه سازی مجموعه ذرات (Particle Swarm Optimization)، الگوریتم ترکیبی جهش قورباغه (Shuffled Frog Leaping Algorithm)، الگوریتم کرم شب تاب (Fire Fly Algorithm)

رویکردهای جستجو جهت تعیین جواب بهینه

در هر مسئله بهینه سازی ترکیب های مختلف مقدارهای ممکن برای متغیرهای تصمیم، هر یک منجر به برازشی برای تابع هدف می شوند و مجموعه تمامی برازش های فضای تصمیم، رویه تابع هدف را تشکیل خواهد داد.

هدف از حل مسئله بهینه سازی یافتن نقطه ای از فضای تصمیم است که به ازای آن بسته به هدف مسئله، بیشترین و یا کمترین مقدار تابع هدف مشخص شود و برای این منظور می توان از روش های مختلفی استفاده کرد.

جستجوی نقطه بهینه در فضای تصمیم در عمل میت واند با یکی از سه الگوی زیر صورت گیرد. این الگوها پایه و اساس و مبنای کلیه روش های بهینه سازی می باشند:

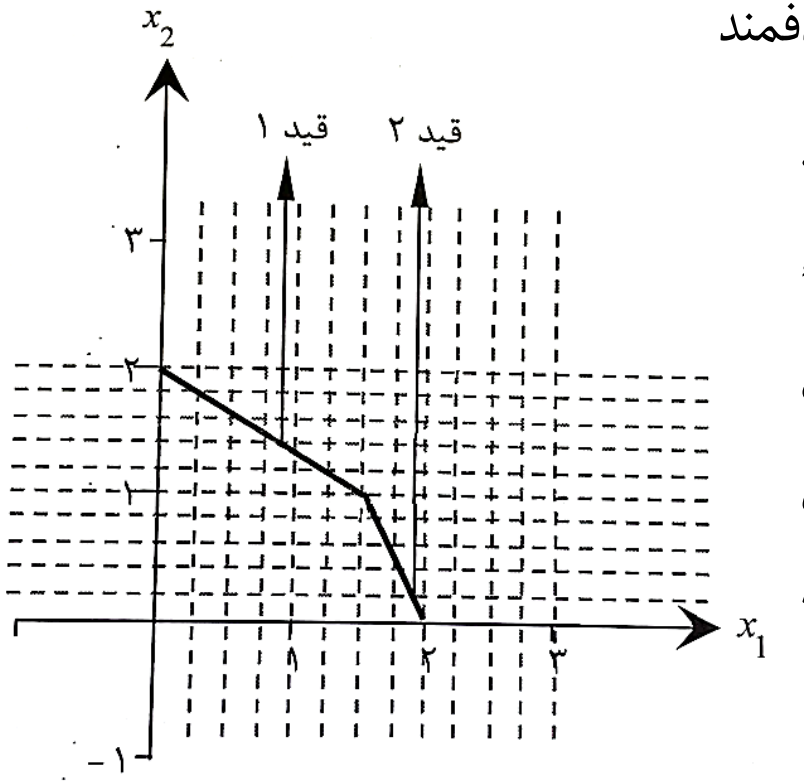
- روش های شبیه سازی و جستجو
- روش های حل دستگاه معادلات
- روش های بر پایه گرادیان

رویکردهای جستجو جهت تعیین جواب بهینه

روش های شبیه سازی و جستجو

مبنای روش های موجود در این دسته به انتخاب متوالی جواب هایی از کل فضای تصمیم، شبیه سازی هر جواب، کنترل ارضای قیدها در جواب انتخابی و کنترل حضور جواب مورد نظر در فضای تصمیم موجه است. این انتخاب های متوالی می توانند هدفمند یا بی هدف صورت گیرند که در عمل پایه روش های موجود در این بخش را تشکیل می دهند:

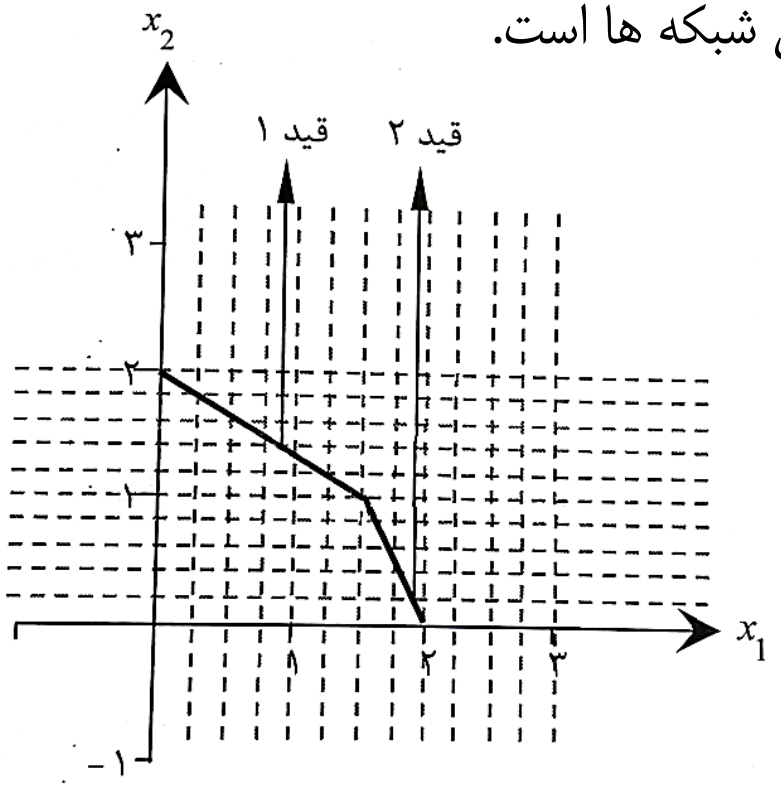
۱-نمونه گیری در شبکه یکنواخت ۲- نمونه گیری تصادفی ۳- نمونه گیری هدفمند

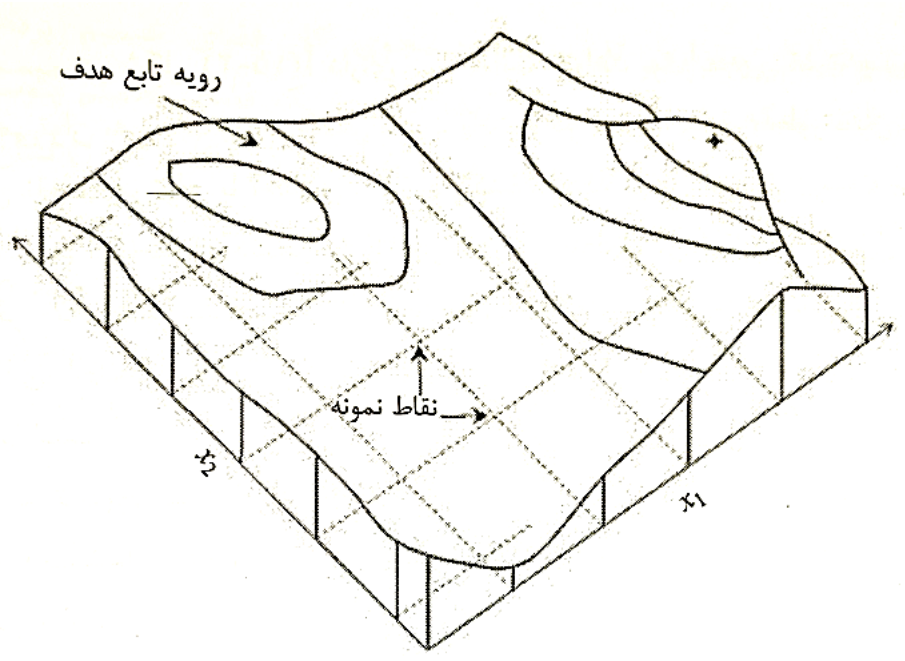


۱-نمونه گیری در شبکه یکنواخت: در این روش، تمامی نقاط فضای تصمیم بررسی می شود. در صورت ناپیوسته بودن مسئله بهینه سازی، تمامی جواب های موجه (جواب هایی که قیدها را ارضاء می نمایند) استخراج و متناسب با آن تابع هدف مربوطه تعیین می گردد. سپس با توجه به جهت تابع هدف (بیشینه سازی و یا کمینه سازی)، نقطه بهینه و مقدار بهینه تابع هدف متناظر با آن استخراج می شود. در صورتی که فضای تصمیم، پیوسته باشد، با توجه به عدم امکان بررسی تمام جواب های موجه در فضای تصمیم، لازم است شبکه یکنواخت فرضی بر روی فضای تصمیم تعریف شود.

رویکردهای جستجو جهت تعیین جواب بهینه

لذا با پذیرفتن مقداری تقریب، کل فضای تصمیم جستجوی می شود. هرچه فاصله خط چین ها کمتر و تعداد آنها بیشتر باشد و یا به عبارت دیگر هرچه ناپیوسته سازی فضای تصمیم در بازه های کوچک تری صورت پذیرد، جستجوی فضای تصمیم با دقت بیشتری اما با زمان طولانی تری انجام خواهد شد. در روش نمونه گیری در شبکه یکنواخت، نحوه شبکه بندی فضای تصمیم در یافتن نقطه بهینه مطلق بسیار موثر است. اگر شبکه بندی بیش از حد درشت باشد و یا آنکه شیب قله (دره) منتهی به نقطه x بیش از حد زیاد باشد حتی ممکن است نقطه بهینه مطلق هرگز قابل دستیابی نباشد. تنها راه حل در این موارد، هر چه کوچکتر در نظر گرفتن شبکه ها است.





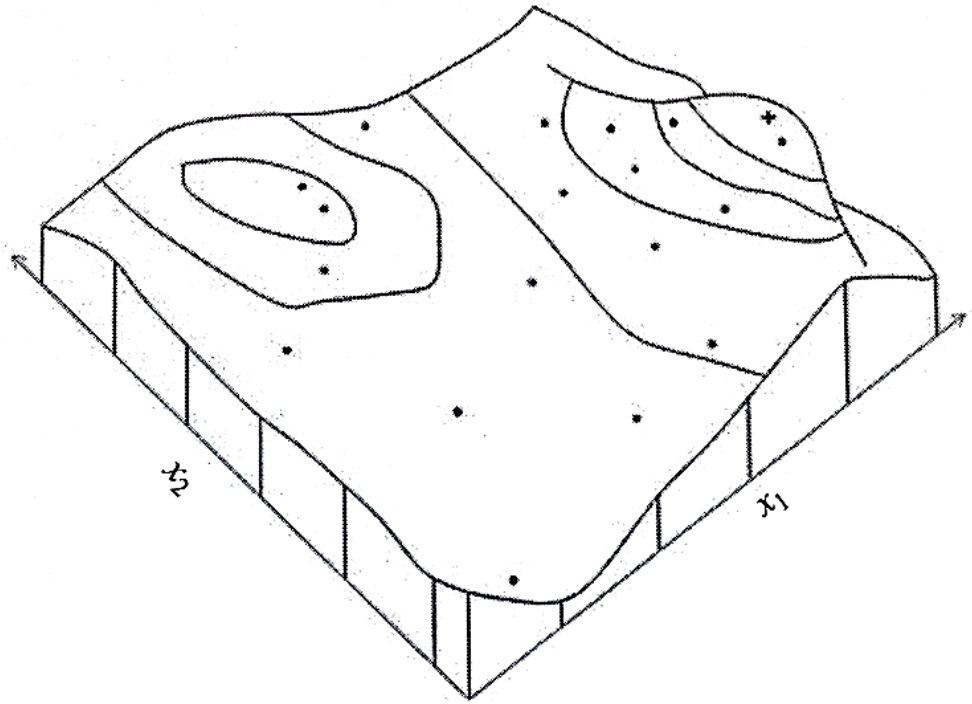
عیب این روش، زمان طولانی مورد نیاز برای انجام محاسبات است که گاهی حتی رسیدن فرآیند حل به انتها و جستجوی کلیه نقاط را نیز غیرممکن می سازد.

رویکردهای جستجو جهت تعیین جواب بهینه

۲- روش نمونه گیری تصادفی: در این روش از کل نقاط موجود در فضای تصمیم مسئله به صورت تصادفی نمونه گیری می شود. لذا این امکان وجود دارد که در نمونه گیری های بعدی نیز یکی از نقاط سنجش شده دوباره انتخاب شوند. در این راستا دو رویکرد را می توان اتخاذ کرد:

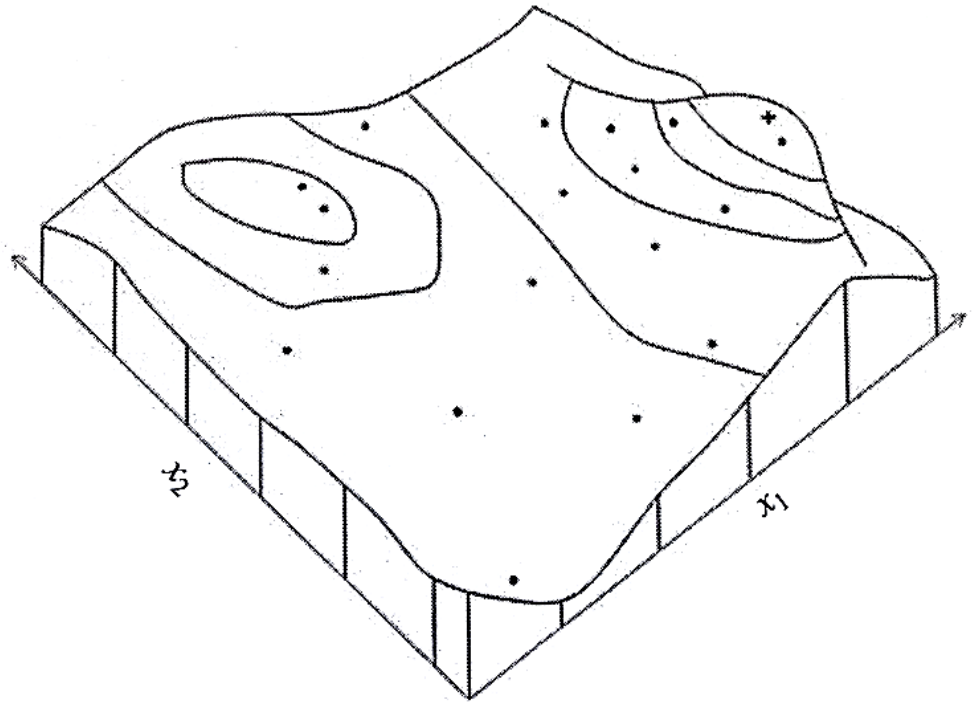
الف) بدون توجه به انتخاب قبلی جواب جدید مورد سنجش قرار گیرد.

ب) هر جواب جدید با کلیه جواب های سنجش شده قبلی مقایسه شده و در صورت مغایر بودن این جواب جدید با فهرست جواب های قبلی، مورد بررسی از نظر کنترل قیدها و محاسبه تابع هدف قرار می گیرد.



مزیت رویکرد دوم نسبت به رویکرد اول: کاهش حجم و مقدار شبیه سازی های تکراری و کاهش زمان محاسبات است. انجام شبیه سازی در بسیاری از مسائل مدیریت منابع آب، نیازمند حل تعداد زیادی معادلات دیفرانسیل پیچیده بوده و بسیار زمان بر است.

رویکردهای جستجو جهت تعیین جواب بهینه



معایب رویکرد دوم نسبت به رویکرد اول: زمان بر بودن انجام مقایسه های زوجی بین جواب جدید با فهرست جواب های قبلی به دلیل تعداد زیاد جواب های قبلی (در برخی موارد، زمان این مقایسه ها بسیار بیشتر از زمان مورد نیاز برای یکبار شبیه سازی جواب جدید است). بنابراین انتخاب نوع رویکرد مناسب تا حد زیادی به نوع مسئله و تحلیل کاربر بستگی خواهد داشت.

نقاط قوت روش: با استفاده از روش نمونه گیری تصادفی می توان در مدت زمان بسیار کمتری نسبت به روش نمونه گیری در شبکه یکنواخت و تا حد قابل قبولی و البته با درصدی از اطمینان به مقدار بهینه تابع هدف نزدیک شد.

نقطه ضعف روش: هرگز مشخص نیست جواب بهینه بدست آمده پس از نمونه گیری تصادفی چه مقدار با جواب بهینه مطلق تابع هدف فاصله دارد.

رویکردهای جستجو جهت تعیین جواب بهینه

۳- روش آزمون و خطای هدفمند

در روش های نمونه گیری در شبکه یکنواخت و نمونه گیری تصادفی که هر دو مبتنی بر سعی و خطای متوالی بودند، انتخاب نقطه بعدی به طور کامل مستقل از نقطه و یا نقطه های آزمایشی قبلی صورت می پذیرد. در حقیقت میتوان گفت که منطق خاصی برای انتخاب مسیر حرکت بر روی فضای تصمیم مسئله در آن ها وجود ندارد.

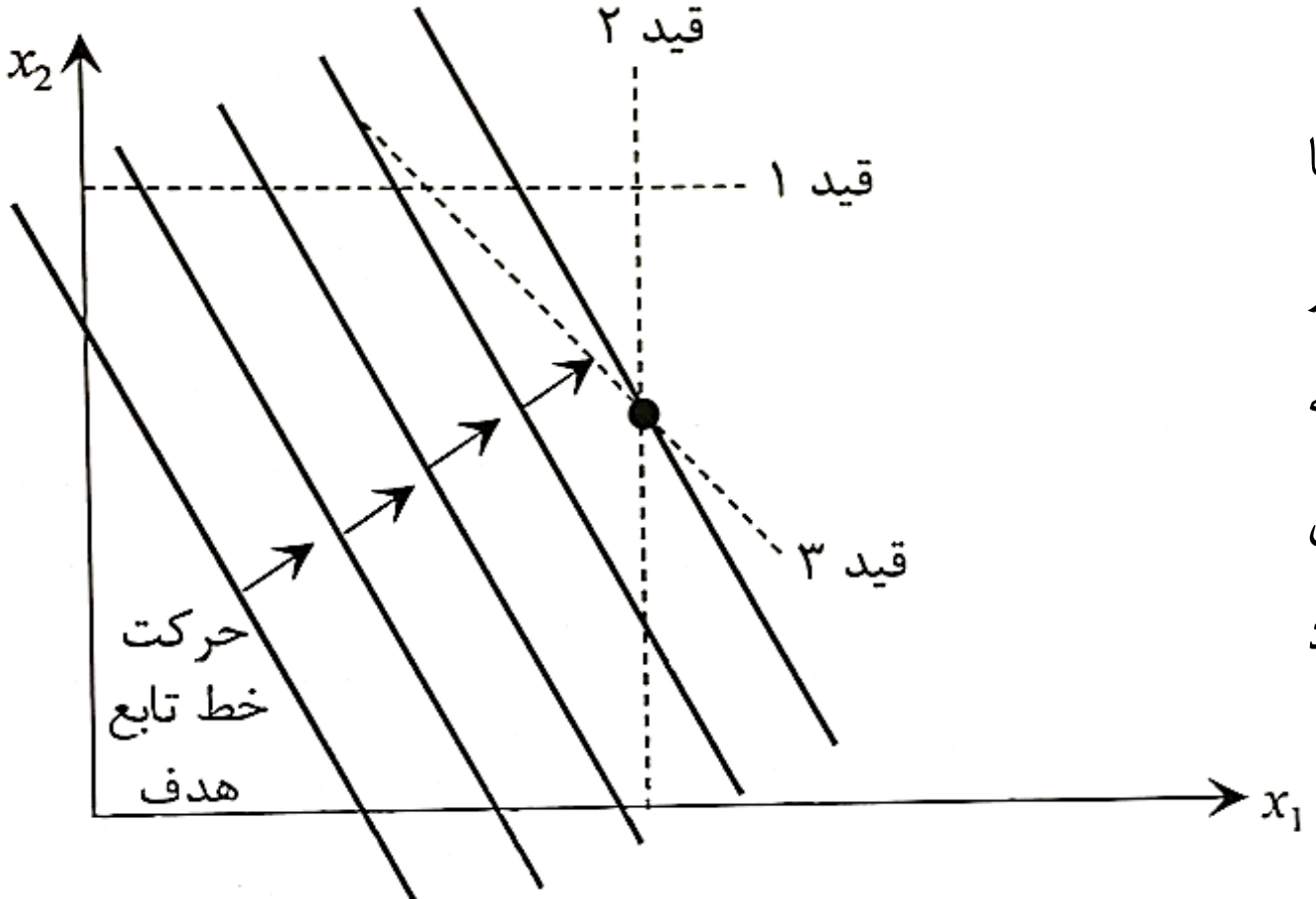
در روش آزمون و خطای هدفمند نقطه بعدی در جهت و یا مسیری انتخاب می شود که کاربر احتمال می دهد جواب بهتری در آن جهت بیابد. در واقع طراح و یا محققی که در حال حل مسئله است، با توجه به شناختی که از مسئله فضای تصمیم و یا تابع هدف آن دارد، نمونه های بعدی را در جهتی انتخاب می کند که احتمال می دهد به فراخور آنها بیشترین تغییر مثبت در مقدار تابع هدف رخ خواهد داد.

اگرچه که چنین روش هایی اغلب کاربر دوست بوده و جواب نهایی بدست آمده توسط آن ها و همچنین روند رسیدن به آن به طور کامل در یک مسیر منطقی قابل توجیه سیر می کند، اما از نظر علمی هیچگونه تضمینی برای بهینه بودن جواب نهایی ارائه شده و یا حتی بهینه بودن جهت حرکت انتخاب شده وجود ندارد. در واقع این روش مبنای توسعه الگوریتم های تکاملی و فراکاوشی است. در این الگوریتم ها جهت حرکت و تولید نقطه بعدی با توجه به مبانی الگوریتم که به طور عمومی برگرفته از طبیعت است تعیین می شود.

رویکردهای جستجو جهت تعیین جواب بهینه

روش حل دستگاه معادله ها

هر مدل بهینه سازی در عمل از یک تابع هدف و تعدادی از نامعادله ها تشکیل شده است. در مسائل خطی، به طور حتم جواب بهینه در یکی از گوشه ها نقطه های تقاطع مرزها قرار می گیرد، در حالی که در مسئله های غیر خطی ممکن است جواب بهینه در گوشه ها واقع نشده و یکی از نقطه های موجه متغیرها در محدوده موجه باشد.

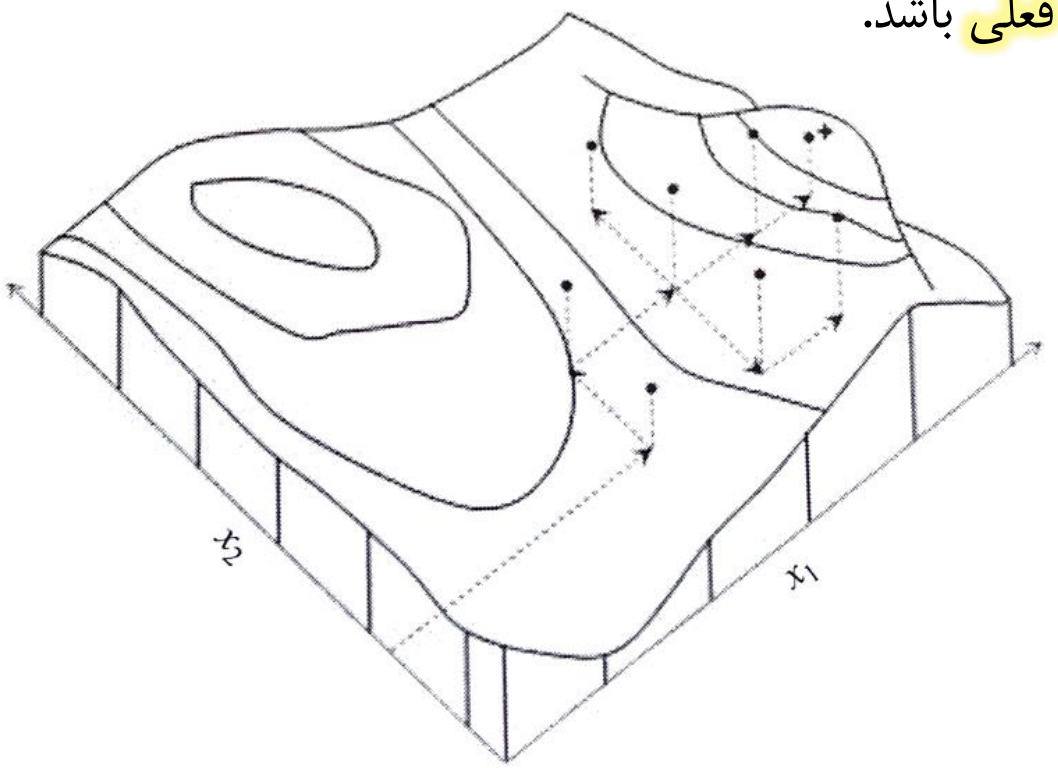


با استفاده از راه کارهایی امکان تبدیل نامعادله ها به معادله ها وجود دارد به این ترتیب در یک مسئله بهینه سازی با n متغیر تصمیم، با حل همزمان هر n معادله، نقطه ای بدست می آید که در واقع یک نقطه گوشه از فضای تصمیم موجه است و این روش به طور عمومی برای مدل های بهینه سازی خطی کاربرد دارد.

رویکردهای جستجو جهت تعیین جواب بهینه

روش استفاده از مشتقات جزئی تابع هدف

این روش هم در حقیقت بر اساس آزمون و خطا است با این تفاوت که شناسایی جهت حرکت بر روی فضای تصمیم در آن دارای یک منطق ریاضی است. همان طور که قبلاً بیان گردید، حتی در روش آزمون و خطای هدفمند تضمینی برای بهینه بودن جهت حرکت انتخاب شده وجود ندارد. جهت برطرف ساختن این نقص در این روش، با توجه به شیب و گرادیان رویه تابع هدف، مسیری جهت حرکت و آزمایش نقطه بعدی انتخاب می شود که در جهت بیشترین شیب رویه تابع هدف در نقطه فعلی باشد.



لذا می توان ادعا کرد که مسیر انتخاب شده به طور قطع بیشترین تأثیر مثبت را در مقدار تابع هدف به دنبال خواهد داشت. برای این منظور از مشتقات جزئی تابع هدف برحسب هر یک از متغیرهای تصمیم استفاده می شود و حرکت در جهتی (راستای متغیری) انجام می شود که بیشترین مقدار مشتق جزئی را در نقطه فعلی داشته است. به بیان دیگر مقدار متغیر تصمیمی که دارای بیشترین مقدار مشتق جزئی در نقطه فعلی بوده است، افزایش یا کاهش (با توجه به جهت تابع هدف بیشینه سازی یا کمینه سازی) می یابد.

رویکردهای جستجو جهت تعیین جواب بهینه

مشکل اصلی در روش استفاده از مشتقات جزئی تابع هدف، محاسبه مقدار مشتق های جزئی است. در برخی از مسئله ها محاسبه مشتق های جزئی کار ساده ای است ولی این امر همیشه صادق نیست. در مسائل واقعی و پیچیده که محاسبه رابطه مشتق های جزئی تابع هدف کار دشواری است، می توان از رابطه زیر برای هر یک از متغیرهای تصمیم در هر نقطه مورد بررسی از فضای تصمیم استفاده نمود:

$$\frac{\partial Z}{\partial x_i} = \frac{Z_{x_i} - Z_{(x_i \pm \Delta x_i)}}{\pm \Delta x_i} \quad , \qquad i = 1,2, \dots, n$$

تعداد متغیر تصمیم

نکته قابل توجه در هر گام از این روش، این است که انتخاب جهت ادامه حرکت بر روی فضای تصمیم بر اساس گرادیان رویه تابع هدف در نقطه فعلی صورت می پذیرد. طبیعی است که حرکت در راستایی که بیشترین گرادیان فعلی را دارد به طور قطع بهترین انتخاب نیست. در برخی موارد حرکت در این مسیر منجر به رسیدن به جواب بهینه موضعی می شود.

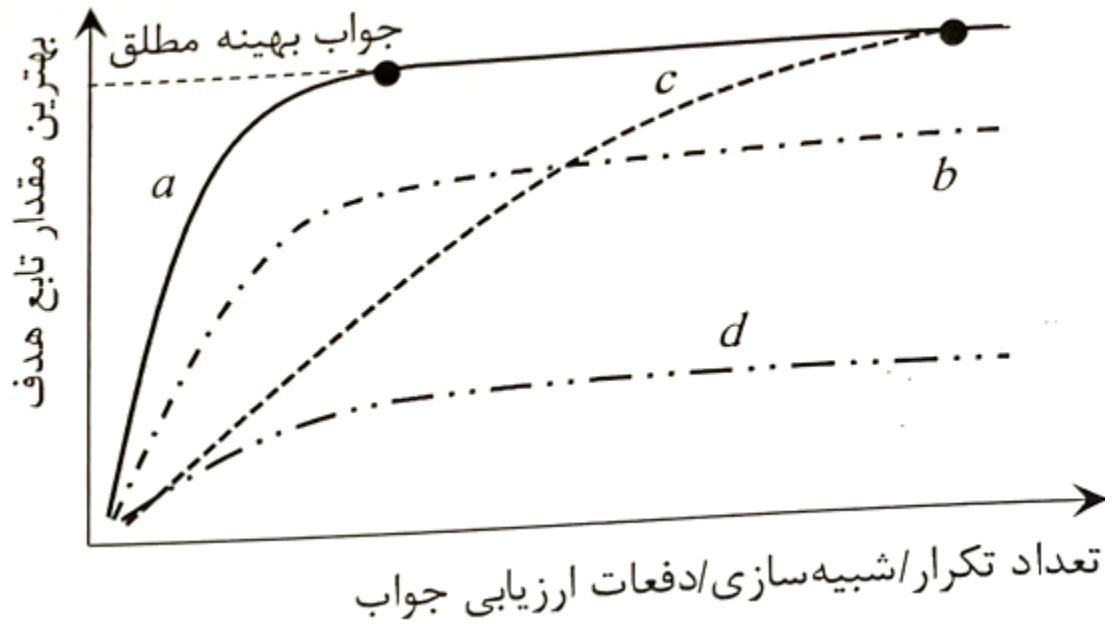
مبنای مقایسه روش های مبتنی بر جستجوی نقطه ای

در روشهای مبتنی بر جستجوی نقطه ای فضای تصمیم، روند بهبودی تابع هدف تا رسیدن به نقطه بهینه به صورت گام به گام و تدریجی صورت می گیرد. به منحنی نمایش دهنده روند تغییر ات تابع هدف در دفعات مختلف ارزیابی تابع هدف، **نمودار همگرایی** (Convergence Curve) گویند.

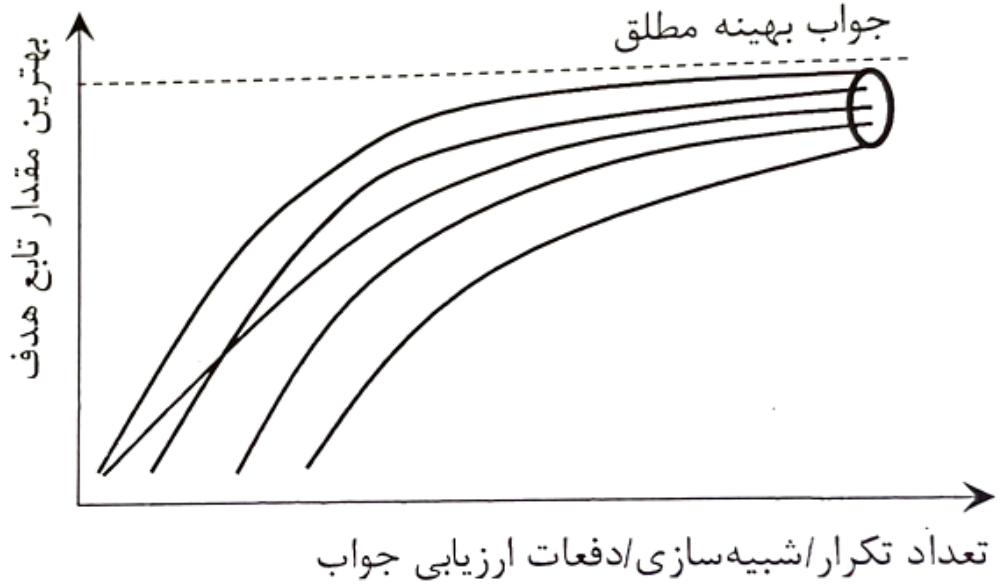
جهت ارزیابی قابلیت و کارآیی روش های مبتنی بر جستجوی نقطه ای، لازم است این روش ها به کرات مورد اجرا قرار گیرند تا بتوان بر مبنای میانگین و برآیندی از اجراهای متفاوت آن ها، این روش را مورد مقایسه قرار داد. برای این منظور معیارهای زیر می تواند مفید باشد:

- میزان نزدیکی به جواب بهینه (نزدیک بهینه) که بیانگر دقت روش است.
- شدت و شتاب بهبود تابع هدف که معادل با تغییرهای بهبود سریع تابع هدف در تکرارهای کمتر است و در مسئله های بیشینه سازی با تحدب بیشتر منحنی همگرایی و در مسائل کمینه سازی با تقعر بیشتر منحنی همگرایی مشخص می شود و در عمل بیانگر سرعت روش حل است.
- میزان نزدیکی جواب های نهایی حاصل از اجراهای مختلف برای یک روش که در عمل بیانگر قابلیت اطمینان روش حل است.

رویکردهای جستجو جهت تعیین جواب بهینه



در شکل مقابل، نمودارهای همگرایی متفاوت توسط روش های مختلف نشان داده شده است. منحنی a دارای سرعت و دقت زیاد، منحنی b، دارای سرعت زیاد و دقت کم، منحنی c، دارای سرعت کم و دقت زیاد و منحنی d دارای سرعت و دقت کم می باشد.



نمایش یک دسته منحنی همگرایی با قابلیت اطمینان زیاد که در نتیجه اجراهای متفاوت از یک روش بهینه سازی بدست آمده است.

رویکردهای جستجو جهت تعیین جواب بهینه

نکته: در هر مسئله بهینه سازی برای یافتن نقطه بهینه **شرایط لازم و کافی** این است تا دو دسته از نقاط مورد ارزیابی و مقایسه قرار گیرند (این قاعده کلی بوده و در تمامی مسائل بهینه سازی صادق است):

(۱) نقطه هایی از فضای تصمیم که به ازای آنها مشتق تابع هدف صفر است.

(۲) نقطه های مرزی فضای تصمیم موجه مسئله که در آنها تابع هدف مشتق ندارد.